CO5412: Optimización No Lineal I.
Enero-Marzo 2011

TAREA 1

1. Halle el gradiente y la matriz Hessiana de las siguientes funciones $f : \Re^n \to \Re$:

   a) $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x + c$, donde $A \in \Re^{n\times n}$, $b \in \Re^n$ y $c \in \Re$.

   b) $f(x) = g(h(x))$ con $g : \Re \to \Re$.

2. Considere el problema $\min\{\|Ax - b\|_2^2\}$, $A \in R^{mxn}$, $b \in R^m$

   a) De una interpretación geométrica del problema.

   b) Escriba una condición necesaria para optimalidad. ¿Es esta condición también suficiente?.

   c) ¿Existe una única solución?, ¿por qué?.

   d) ¿Puede expresar la solución en forma de ecuación cerrada?. Especifique cualquier suposición que pueda necesitar.

   e) Resuelva el problema propuesto para: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. Para aproximar una función g en el intervalo [0,1) mediante un polinomio p de grado $\leq n$, se minimiza el criterio: $f(\overline{a}) = \int_0^1 (g(x) - p(x))^2\, dx$ donde $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$. Halle las ecuaciones satisfechas por los coeficientes óptimos $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

4. Considere la función $f(x, y, z) = 2x^2 + xy + y^2 + yz + z^2 - 6x - 7y - 8z + 9$. Utilice las condiciones de optimalidad para hallar un punto minimizador de la función y demuestre que el punto es un mínimo global.

5. Sea $g : \Re \to \Re$ una función convexa y no decreciente, es decir que $g(x) \leq g(\bar{x})\ \forall x < \bar{x}$, y $f : \Re^n \to \Re$ una función convexa.

   a) Demuestre que la función $h(x) = g(f(x))$, $h : \Re^n \to \Re$ es convexa

6. Sea $g : \Re \to \Re$ una función estrictamente creciente, $f : \Re \to \Re$. Pruebe que minimizar $f(x)$ es equivalente a minimizar $g(f(x))$.

7. Encuentre los puntos estacionarios de:

$$f(x) = 2x_1^3 - 3x_1^2 - 6x_1x_2(x_1 - x_2 - 1)$$

   Cuáles de esos puntos son minimizadores o maximizadores locales o globales?.

8. Sea $f(x) = (x_1 - x_2^2)(x_1 - 1/2x_2^2)$. Verifique que $\hat{x} = (0, 0)^T$ es un minimizador local de $\phi(\lambda) = f(\hat{x} + \lambda d)$ para todo $d \in \Re^2$, pero $\hat{x}$ no es un minimizador local de f.

9. Demuestre que $(x_1 x_2 ... x_n)^{1/n} \leq \sum x_i/n$ para todo $x_1, x_2, ..., x_n > 0$.

   Sugerencia:

   - Realize el cambio $y_i = \ln(x_i)$
   - Llame $m = y_1 + y_2 + ... + y_n$. Ahora demuestre que $e^{m/n} \leq n(e^{y_1} + e^{y_2} + ... + e^{m - y_1 - y_2 - ... - y_n})$ mostrando que la función de la derecha de la desigualdad tiene como valor minimal $e^{m/n}$ (use las condiciones de optimalidad).