UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
Departamento de Computación y
Tecnología de la Información
Estructuras Discretas III

Práctica 1 semana 2
Sartenejas, 14 de Enero de 2011

1. Dados dos conjuntos X y A, con $|X| = 7, |A| = 15$

   a) ¿Cuántas funciones de X en A hay?

   b) ¿Cuántas de ellas son inyectivas?

   c) ¿En cuántas funciones el elemento x_i va al elemento a_j?

   d) ¿Cuál es el número de funciones donde x_i, x_j son siempre enviados a a_r?

   Solución:

   a) Por cada elemento del conjunto X hay 15 posibles imágenes por tanto hay 15^7 funciones de X en A.

   b) El primer elemento del conjunto X tiene 15 posibles imágenes, el segundo elemento del conjutno X tiene 14 posibles imágenes, el tercer elemento tiene 13 imágenes posibles, continuando este proceso tenemos que el último elemento tiene 9 (15-7+1) posibles imágenes. En total hay $15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times \times 10 \times 9$ funciones inyectivas.

   c) Hay 14^6 funciones donde el elemento x_i va al elemento a_j, ya que fijamos la imagen de x_i que es a_j y en el dominio quedan 6 elementos y en el rango 14 para formar todas las funciones posibles.

   d) El número es 14^5. Razonamiento similar al anterior.

   $\blacksquare$

2. ¿Cuántas palabras de longitud 5 se pueden formar de un alfabeto de 9 elementos?
   Solución: Hay 9 elementos para elegir uno y colocarlo en la primera posición, como no hay restricciones hay 9 elementos para elegir uno y colocarlo en la segunda posición, así sucesivamente hay 9 elementos para elegir uno y colocarlo en la quinta posición. En total hay 9^5 palabras de longitud 5 que se pueden formar en un alfabeto de longitud 9. $\blacksquare$

3. Determine el número de enteros de seis dígitos en los que

   a) ningún dígito se puede repetir.

   b) se pueden repetir los dígitos.

Solución: Teniendo en cuenta que en la primera posición no puede estar el cero.

a) El número es $9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5$. En el primer dígito se escoge un número entre 9 disponibles (distintos de cero) una vez colocado éste hay 8 números disponibles incluyendo el cero hay 9 números para elegir uno y colocarlo en el segundo dígito, una vez colocado éste quedan 8 números para elegir uno en la tercera posición y así sucesivamente, en el sexto dígito hay 5 números disponibles para escoger uno.

b) En la primera posición hay 9 números distintos de cero se escoge uno, como se pueden repetir números e incluimos el cero quedan para las posiciones restantes 10 números para escoger por tanto hay 9×10^5 números de 6 dígitos.

■

4. ¿De cuántas formas se pueden arreglar r objetos en m cajas si:

   a) Se puede hacer de cualquier forma?

   b) Cada caja debe contener a lo sumo un objeto?

   c) El segundo objeto siempre va a la caja j y ningún otro objeto va a esa caja?

   Solución:

   a) Hay m^r formas de hacerlo. Equivalente a contar funciones de r en m.

   b) Hay $m^{\underline{r}}$ formas de hacerlo. Equivalente a contar funciones inyectivas de r en m.

   c) Por hipótesis la imagen del segundo objeto está fija, por tanto quedan $r-1$ objetos para arreglar en $m-1$ cajas lo que puede hacerse de $m-1^{r-1}$ formas.

■

5. ¿ Cuántas subpalabras hechas con todas las letras $ABCDEF$ contienen:

   a) la subpalabra BAD ?

   b) las letras A, B, C juntas?

   Solución:

   a) Hay 4! formas. Se toma BAD como una letra, entonces tenemos 4 letras para permutar.

   b) Hay $4! \times 3!$ formas ya que como en el caso anterior tomamos ABC como un solo bloque y nos quedan 4 letras para permutar y por cada permutación de estas 4 letras hay permutaciones de las letras ABC.

■

6. Se desea colorear los vértices distnguibles de un pentágono regular con q colores. De cuántas formas diferentes se puede lograr esto si se quiere que vértices adyacentes tengan colores diferentes?.
   Solución: Se enumeran los cinco vértices en sentido horario. Se consideran los casos

a) Vértices 1 y 3 del mismo color: hay q colores para escoger uno y colorear los vértices 1 y 3, quedan para escoger $q-1$ colores para escoger uno y colorear el vértice 2, para el vértice 4 hay $q-1$ colores ya que puede o no tener el color del vértice 2. Para el vértice 5 hay $q-2$ colores ya que no puede tener el color del vértice 4 ni el color del vértice 1. En total hay $q \times (q-1)^2 \times (q-2)$ formas de colorear.

b) Vértices 1 y 3 de diferente color: para el vértice 1 hay q colores, para el vértice 3 hay $q-1$ colores, para el vértice 2 hay $q-2$ colores. Consideramos dos casos;

1) Vértices 1 y 4 del mismo color: hay $q-2$ colores para 5. En total hay $q \times (q-1) \times (q-2) \times (q-2)$ posibilidades.

2) Vértices 1 y 4 de diferente color: hay $q-2$ colores para 4 y $q-2$ colores para 5. Hay en total $q \times (q-1) \times (q-2) \times (q-2) \times (q-2)$ posibilidades. Por el principio de adición se puede colorear el pentágono de vértices distinguibles con q colores de

$$q\times(q-1)^2\times(q-2)+[(q\times(q-1)\times(q-2)\times(q-2))+(q\times(q-1)\times(q-2)\times(q-2)\times(q-2))]$$

∎