Universidad Simón Bolívar
Departamento de Computación y
Tecnología de la Información
Estructuras Discretas para el Análisis de Algoritmos
Ci-2525k.

# Solución Prática 1

1. Entre 600 familias 100 de ellas no tienen hijos ni hijas, 200 tienen sólo niños, y 200 tienen sólo niñas, ¿Cuántas familias tienen al menos un niño y una niña?.

   **Solución:** Consideremos el conjunto $A = \{x : x \text{ es una familia}\}$. Por el enunciado sabemos que $N = |A| = 600$. Sobre este conjunto se establecen los subconjuntos:
   $A_n = \{x : x \text{ es una familia sin niños ni niñas}\}$, entonces $|A_n| = 100$,
   $A_o = \{x : x \text{ es una familia con sólo niños}\}$, entonces $|A_o| = 200$,
   $A_i = \{x : x \text{ es una familia con sólo niñas}\}$, entonces $|A_i| = 200$,
   $A_c = \{x : x \text{ es una familia con al menos un niño y una niña}\}$, entonces $|A_c| =?$.

   Nótese que todos estos conjuntos son disjuntos dos a dos, es decir:
   $(A_n \cap A_0) = (A_n \cap A_i) = (A_n \cap A_c) = (A_o \cap A_i) = (A_o \cap A_c) = (A_i \cap A_c) = \emptyset$ y además conforman todo el conjunto de familias $A_n \cup A_0 \cup A_i \cup A_c = A$, por lo que $N = |A_n| + |A_o| + |A_i| + |A_c|$.
   Por lo tanto $N - |A_n| - |A_o| - |A_i| = |A_c| \leftrightarrow |A_c| = 600 - 100 - 200 - 200 = 600 - 500 = 100$

2. Una escuela con 200 estudiantes ofrece las asignaturas de probabilidades, trigonometría y álgebra las cuales tienen una planta de 80 estudiantes cada una. Si hay 30 estudiantes que cursan cualquier par de las tres materias indicadas y 15 estudiantes que cursan las tres materias. Determine, ¿cuántos estudiantes no cursan ninguna de estas materias, y ¿cuántos estudiantes cursan sólo probabilidades?.

   **Solución:** Sobre el conjunto de los estudiantes ($N = 200$), se definen las siguientes propiedades:

   $p1$ : "Estudia probabilidades"

   $p2$ : "Estudia trigonometría"

   $p3$ : "Estudia álgebra"

   Del enunciado sabemos que:
   $N(p1) = N(p2) = N(p3) = 80$.
   $N(p1p2) = N(p1p3) = N(p2p3) = 30$

$N(p1p2p3) = 15$

Queremos conocer lo siguiente: $N(p1'p2'p3')$ y $N(p1p2'p3')$.

Por el principio de inclusión y exclusión sabemos que:

$$\begin{aligned} N(p1'p2'p3') &= N - [N(p1) + N(p2) + N(p3)] + N(p1p2) + N(p1p3) + N(p2p3) - N(p1p2p3) \\ &= 200 - (80 + 80 + 80) + (30 + 30 + 30) - 15 = 200 - 240 + 60 - 15 = 5 \end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} N(p1p2'p3') &= N(p1) - N(p1p2) - N(p1p3) + N(p1p2p3) \\ &= 80 - 30 - 30 + 15 = 35 \end{aligned}$$

3. ¿Cuántos números entre 1 y 30 son corrimos con 30?

**Solución:** Recordemos que dos números son coprimos sí su m.c.d es 1. En otras palabras, $\frac{q}{p}$ con $q, p \in \mathbb{Z}$ es irreductible.

Como los factores de 30 son 2, 3 y 5, entonces nos interesan conseguir los números que no son divisibles por ninguno de estos factores. Consideremos el conjunto $X = \{1 \leq x \leq 30 : x \in \mathbb{N}\}$. Tenemos que $N = |X| = 30$. Sobre este conjunto se definen las siguientes propiedades:

$p1$ : "Es divisible por 2"

$p2$ : "Es divisible por 3"

$p3$ : "Es divisible por 5"

De estos datos se desprende lo siguiente:

$N(p1) = \frac{30}{2} = 15$, $\quad N(p2) = \frac{30}{3} = 10$, $\quad N(p3) = \frac{30}{5} = 6$,
$N(p1p2) = \frac{30}{2x3} = 5$, $\quad N(p1p3) = \frac{30}{2x5} = 3$, $\quad N(p2p3) = \frac{30}{3x5} = 2$,
$N(p1p2p3) = \frac{30}{2x3x5} = 1$.

Cada uno de los cardinales indica cuantos números son divisible por cada factor o combinación de factores. Por ejemplo $N(p3)$ indica cuantos números entre 1 y 30 son divisibles entre 5, estos son 6 números (5,10,15,20,25,30).

Ahora, por el principio de inclusión y exclusión sabemos que:

$$\begin{aligned} N(p1'p2'p3') &= N - [N(p1) + N(p2) + N(p3)] + N(p1p2) + N(p1p3) + N(p2p3) - N(p1p2p3) \\ &= 30 - (15 + 10 + 6) + (5 + 3 + 2) - 1 = 30 - 31 + 10 - 1 = 40 - 32 = 8 \end{aligned}$$

En efecto, los números entre 1 y 30 coprimos con 30 son ocho: (1,7,11,13,17,19,23,29)

4. ¿Cuántos números entre 1 y 280 son primos relativos con 280?

**Solución:** Aplicando un razonamiento análogo al del ejercicio anterior, pero tomando en cuenta que los factores de 280 son $2^3$, 5 y 7 Consideremos el conjunto $X = \{1 \leq x \leq$

$280 : x \in \mathbb{N}\}$. Tenemos que $N = |X| = 280$. Sobre este conjunto se definen las siguientes propiedades:

$p1$ : "Es divisible por 2"

$p2$ : "Es divisible por 5"

$p3$ : "Es divisible por 7"

De estos datos se desprende lo siguiente:

$N(p1) = \frac{280}{2} = 140, \quad N(p2) = \frac{280}{5} = 56, \quad N(p3) = \frac{280}{7} = 40,$
$N(p1p2) = \frac{280}{2x5} = 28, \quad N(p1p3) = \frac{280}{2x7} = 20, \quad N(p2p3) = \frac{280}{5x7} = 8,$
$N(p1p2p3) = \frac{280}{2x5x7} = 4.$

Por el principio de inclusión y exclusión sabemos que:

$$\begin{aligned} N(p1'p2'p3') &= N - [N(p1) + N(p2) + N(p3)] + N(p1p2) + N(p1p3) + N(p2p3) - N(p1p2p3) \\ &= 280 - (140 + 56 + 40) + (28 + 20 + 8) - 4 = 280 - 236 + 56 - 4 = 100 - 4 = 96 \end{aligned}$$

5. ¿Cuántas permutaciones de la palabra TAMELY satisfacen que la T aparece antes que la A o la A aparece antes que la M o la M aparece antes que la E?

   **Solución:** Utilizando el principio de inclusión y exclusión concluimos:

$$6! - \binom{3}{1}\binom{6}{2}4! + \binom{6}{3}3! + \binom{6}{2}\binom{4}{2}2! + \binom{6}{3}3! - \binom{6}{4}2!$$

6. Suponemos que en la población de Maracay hay un 45% que le gusta beber vino, hay 60% que le gusta beber jugo de naranja y 55% le gusta beber té. El 35% de los encuestados prefieren jugo de naranja y té, 35 % prefieren té y vino, y 35% prefieren vino y jugo. Finalmente 25% coinciden en su gusto por las tres bebidas. a) ¿Cuál es el porcentaje de la población que le gusta beber sólo vino? b) ¿Cuál es el porcentaje de la población que le gusta exactamente dos de estas bebidas?

   **Solución:** Del enunciado establecemos el siguiente conjunto:
   Sea $M = \{x : x \text{ es un habitante de Maracay}\}$, $N = |M| = 100\%$. Sobre este conjunto se definen las siguientes propiedades:

   $p_v$ : "Le gusta el vino"

   $p_n$ : "Le gusta el jugo de naranja"

   $p3_t$ "Le gusta el té"

   Entonces, $N(p_v) = 45\%$, $N(p_n) = 60\%$, $N(p_t) = 55\%$, Además: $N(p_vp_t) = N(p_vp_n) = N(p_tp_n) = 35\%$ y $N(p_vp_tp_n) = 25\%$

(a) $N(p'_t p'_n p_v) = N(p_v) - N(p_v p_t) - N(p_v p_n) + N(p_v p_t p_n) = 45 - 35 - 35 + 25 = 70 - 70 = 0$

(b) El número de objetos que satisfacen exactamente $r$ de las $k$ propiedades dadas es:
$e_r = \sum_{i=r}^{k} (-1)^{i-r} \begin{pmatrix} i \\ i-r \end{pmatrix} s_i$, nos interesa el caso $k = 2$
$e_2 = \sum_{i=2}^{3} (-1)^{i-r} \begin{pmatrix} i \\ i-r \end{pmatrix} s_i = (-1)^{2-2} \begin{pmatrix} 2 \\ 2-2 \end{pmatrix} s_2 + (-1)^{3-2} \begin{pmatrix} 3 \\ 3-2 \end{pmatrix} s_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} s_2 - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} s_3 =$
$s_2 - 3s_3$
Recordemos que en este caso $s_2 = N(p_v p_t) + N(p_v p_n) + N(p_t p_n)$ y $s_3 = N(p_v p_t p_n)$ por lo que el resultado es:
$e_2 = N(p_v p_t) + N(p_v p_n) + N(p_t p_n) - 3N(p_v p_t p_n) = 35 + 35 + 35 - 3(25) = 105 - 75 = 30\%$

7. Sean las permutaciones del conjunto $\{i : 1 \leq i \leq n\}$. Determine que si el número de estas permutaciones que no colocan $j$ y $j+1$ consecutivamente $(1 \leq j \leq n-1)$, en ese orden, es $Q_n$, entonces $Q_n = n! + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix} (n-k)!$

   **Solución:** Denotaremos $\pi$ a el conjunto con las permutaciones totales. Entonces $|\pi| = n!$.
   Consideremos los siguientes subconjuntos definidos sobre $\pi$:
   $$\pi_i = \{\text{permutaciones que dejan consecutivo a } i, i+1 \text{ con } 1 \leq i \leq n-1\}.$$
   Por ejemplo el conjunto $\pi_1$ contiene las permutaciones que dejan consecutivo a la posición 1 y a la 2, por lo tanto nos interesan las permutaciones de $(n-1)$ caracteres ya que consideramos los caracteres en la posición 1 y 2 como si fueran uno solo. De este tipo de conjuntos hay $\begin{pmatrix} n-1 \\ 1 \end{pmatrix}$ distintos.

   Por el principio de inclusión y exclusión tenemos que el número de permutaciones que no colocan a $j$ y $j+1$ consecutivamente son:

   $$n! - |\bigcup_{i=1}^{n-1} \pi_i| = n! - \begin{pmatrix} n-1 \\ 1 \end{pmatrix} (n-1)! + \begin{pmatrix} n-1 \\ 2 \end{pmatrix} (n-2)! - \begin{pmatrix} n-1 \\ 3 \end{pmatrix} + ... + (-1)^{n-1} \begin{pmatrix} n-1 \\ n-1 \end{pmatrix} 1!$$
   $$= n! + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix} (n-k)!$$

8. Determine que, $\begin{pmatrix} n-m \\ n-r \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \begin{pmatrix} m \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-i \\ r \end{pmatrix}$ donde $m \leq k \leq n$. Sugerencia: muestre que el combinatorio de la izquierda es el número de seleccionar k elementos de un conjunto de n elementos distintos, si hay m objetos especiales que deben ser incluidos en la selección.

   **Solución:** Sea $A = \{x_1, x_2, ..., x_m, y_{m+1}, ..., y_n\}$ . Para $1 \leq i \leq m$, $c_i$ denota que $r$ elementos se seleccionan de A con $r \geq m$ y $x_i$ no se incluye en la selección. Entonces:

$N = \binom{n}{r}$, $N(c_i) = \binom{n-1}{r}$, con $1 \leq i \leq m$. Definimos $S_1 = \binom{m}{1}\binom{n-1}{r}$
$N(c_i c_j) = \binom{n-2}{r}$, con $1 \leq i < j \leq m$. Definimos $S_2 = \binom{m}{2}\binom{n-2}{r}$, etc
$\binom{n-m}{n-r} = N(c_1' c_2' ... c_m') = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i}\binom{n-i}{r}$.
Recordar que por el principio de inclusión y exclusión $N(c_1' c_2' ... c_m') = S_0 - S_1 + S_2 - S_3 ...$