Universidad Simón Bolívar
Departamento de Computación y
Tecnología de la Información
Estructuras Discretas para el Análisis de Algoritmos
Ci-2525k.

Solución Prática 3

1. Resuelva las siguientes ecuaciones en recurrencia:

a.- $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}, a_0 = a_1 = 1$
Solución: La ecuación de recurrencia la podemos expresar como:

$$a_n - 3a_{n-1} - 4a_{n-2} = 0$$

De aquí es fácil ver que la ecuación característica es $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \iff (\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0 \iff \lambda_1 = 4, \lambda_2 = -1$.

Caso raíces reales distintas:
Solución general: $a_n = c_1(\lambda_1)^n + c_2(\lambda_2)^n$. En nuestro caso: $a_n = c_1(4)^n + c_2(-1)^n$

Condiciones de borde:
$a_0 = 1 = c_1(4)^0 + c_2(-1)^0 = c_1 + c_2$
$a_1 = 1 = c_1(4)^1 + c_2(-1)^1 = 4c_1 - c_2$
Sumando las dos ecuaciones tenemos que $2 = 5c_1 \implies c_1 = \frac{2}{5}$
Reemplazando c_1 en la primera ecuación: $1 = c_1 + c_2 \implies c_2 = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

Solución particular: $a_n = \frac{2}{5}(4)^n + \frac{3}{5}(-1)^n$

Chequeo de los primeros terminos:

Relación de recurrencia	Solución de la relación de recurrencia
$a_0 = 1$	$a_0 = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = \frac{5}{5} = 1$
$a_1 = 1$	$a_1 = \frac{8}{5} - \frac{3}{5} = \frac{5}{5} = 1$
$a_2 = 3a_1 + 4a_0 = 3 + 4 = 7$	$a_2 = \frac{2}{5}(4.4) + \frac{3}{5} = \frac{32+3}{5} = \frac{35}{5} = 7$
$a_3 = 3a_2 + 4a_1 = 3(7) + 4 = 25$	$a_2 = \frac{2}{5}(4.4.4) - \frac{3}{5} = \frac{128-3}{5} = \frac{125}{5} = 25$

b.- $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}, a_0 = a_1 = 2$
Solución: La ecuación de recurrencia la podemos expresar como:

$$a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 0$$

De aquí es fácil ver que la ecuación característica es $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \iff (\lambda - 1)(\lambda - 1) = 0 \iff \lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Caso raíces reales iguales:
Solución general: $a_n = c_1(\lambda_1)^n + c_2 n(\lambda_2)^n$.
En nuestro caso: $a_n = c_1(1)^n + c_2 n(1)^n = c_1 + nc_2$

Condiciones de borde:
$a_0 = 2 = c_1 + 0c_2 = c_1$
$a_1 = 2 = c_1 + c_2$. Como $c_1 = 2$ entonces $c_2 = 0$
Solución particular: $a_n = 2$

Chequeo de los primeros terminos:

Relación de recurrencia	Solución de la relación de recurrencia
$a_0 = 2$	$a_0 = 2$
$a_1 = 2$	$a_1 = 2$
$a_2 = 2a_1 - a_0 = 2(2) - 2 = 4 - 2 = 2$	$a_2 = 2$
$a_3 = 2a_2 - a_1 = 2(2) - 2 = 2$	$a_2 = 2$

c.- $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} + 3(4)^n, a_0 = a_1 = 1$

Solución:

Solución general: Esta relación de recurrencia es de segundo grado no homogénea. La solución de la misma se puede conseguir como la combinación de la solución de la relación homogenea con la solución particular del término no homogeneo. Es decir:

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$$

Solución asociada a la recurrencia homogenea:
La parte homogenea de la recurrencia es: $a_n^{(h)} = a_n - 3a_{n-1} - 4a_{n-2} = 0, a_0 = a_1 = 1$.
Esta recurrencia es la misma del ejercicio 1. a.-, por lo que su solución general es:

$$a_n = c_1(4)^n + c_2(-1)^n$$

Solución asociada a la parte no homogenea:
Utilizando el método de Coeficientes Indeterminados sabemos que si la parte no homogénea es $f_n = P(n)a^n$, con $P(n)$ un polinomio de grado s y a es raíz de multiplicidad α de la ecuación característica, la solución particular debe buscarse de la forma $n^\alpha Q(n)a^n$, con $Q(n)$ de grado s. En nuestro caso la solución particular debe ser de la forma $a_n^{(p)} = nA(4)^n$.
Como la solución particular debe satisfacer la relación de recurrencia tenemos que: $a_{n-1}^{(p)} = (n-1)A(4)^{n-1}$ y $a_{n-2}^{(p)} = (n-2)A(4)^{n-2}$, por lo tanto:

$$nA(4)^n = 3[(n-1)A(4)^{n-1}] + 4[(n-2)A(4)^{n-2}] + 3(4)^n$$

$$nA(4)^n = 3(nA(4)^{n-1} - A(4)^{n-1}) + 4(nA(4)^{n-2} - 2A(4)^{n-2}) + 3(4)^n$$
$$nA(4)^n = 3nA(4)^{n-1} - 3A(4)^{n-1} + 4nA(4)^{n-2} - 8A(4)^{n-2} + 3(4)^n$$
$$nA(4)^n = 3A(4)^{n-1}(n-1) + 4A(4)^{n-2}(n-2) + 3(4)^n$$

Dividiendo por 4^{n-1}

$$4nA = 3A(n-1) + A(n-2) + 12$$
$$4nA = 3An - 3A + An - 2A + 12$$
$$4nA = 4An - 5A + 12 \iff 0 = -5A + 12 \implies A = \frac{12}{5}$$

La solución particular es $a_n^{(p)} = \frac{12}{5}n(4)^n$

Solución particular: Por último debemos hallar los coeficientes de la solución general:

$$a_n = c_1(4)^n + c_2(-1)^n + \frac{12}{5}n(4)^n$$

Condiciones de borde:
$a_0 = 1 = c_1(4)^0 + c_2(-1)^0 + \frac{12}{5}0(4)^0 = c_1 + c_2 \iff c_1 = 1 - c_2$ (1)
$a_1 = 1 = c_1(4)^1 + c_2(-1)^1 + \frac{12}{5}1(4)^1 = 4(c_1 + \frac{12}{5}) - c_2 \iff 1 = 4\frac{(5c_1+12)}{5} - c_2 = \frac{20c_1+48}{5} - c_2 = \frac{20c_1+48-5c_2}{5} \implies 5 = 20c_1 + 48 - 5c_2$ (2)
Reemplazando (1) en (2) $5 = 20(1-c_2) + 48 - 5c_2 = 20 - 20c_2 + 48 - 5c_2 = -25c_2 + 68 \iff -63 = -25c_2 \implies c_2 = \frac{63}{25}$.
$c_1 = 1 - \frac{63}{25} = \frac{25-63}{25} = \frac{-38}{25}$

Solución particular:

$$a_n = -\frac{38}{25}(4)^n + \frac{63}{25}(-1)^n + \frac{12}{5}n(4)^n = (4)^n(\frac{12n}{5} - \frac{38}{25}) + \frac{63}{25}(-1)^n$$

Chequeo de los primeros terminos:

Relación de recurrencia	Solución de la relación de recurrencia
$a_0 = 1$	$a_0 = \frac{63}{25} - \frac{38}{25} = \frac{25}{25} = 1$
$a_1 = 1$	$a_1 = 4(\frac{12}{5} - \frac{38}{25}) - \frac{63}{25} = 4(\frac{60-38}{25}) - \frac{63}{25} = \frac{88}{25} - \frac{63}{25} = \frac{25}{25} = 1$
$a_2 == 3 + 4 + 3(16) = 7 + 48 = 55$	$a_2 = ... = \frac{1375}{25} = 55$

d.- $a_n = a_{n-2}, a_0 = a_1 = 0$

Solución: La ecuación de recurrencia la podemos expresar como:

$$a_n - a_{n-2} = 0$$

De aquí es fácil ver que la ecuación característica es $\lambda^2 - 1 = 0 \iff (\lambda-1)(\lambda+1) = 0 \iff \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$.

Caso raíces reales distintas:
Solución general: $a_n = c_1(\lambda_1)^n + c_2(\lambda_2)^n$. En nuestro caso: $a_n = c_1(1)^n + c_2(-1)^n = c_1 + c_2(-1)^n$

Condiciones de borde:
$a_0 = 0 = c_1 + c_2(-1)^0 = c_1 + c_2$
$a_1 = 0 = c_1 + c_2(-1)^1 = c_1 - c_2 \iff c_1 = c_2$
Reemplazando c_1 en la primera ecuación: $0 = c_1 + c_2 = c_2 + c_2 = 2c_2 \implies 2c_2 = 0 \iff c_2 = 0 = c_1$

Solución particular: $a_n = 0$

2. Encuentre las funciones generatrices de las sucesiones que satisfacen las siguientes recurrencias:

a.- $a_n = a_{n-1} + 2, a_0 = 1$
Solución: Reescribimos esta recurrencia con una sola fórmula que sea válida para todo n:

$$a_n = (a_{n-1} + 2)[n > 0] + a_0[n = 0]$$

Sea $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Multiplicando por z^n y sumando se tiene:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n &= \sum_{n=1}^{\infty}(a_{n-1} + 2)z^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_0[n = 0] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2z^n + a_0 \\
&= z\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} z^{n-1} + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n + 1 \\
&= z\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} z^n + 1 - 2 \\
A(z) &= zA(z) + 2(\tfrac{1}{1-z}) - 1 \\
A(z) - z(A) &= 2(\tfrac{1}{1-z}) - 1 \\
A(z)(1 - z) &= \tfrac{z+1}{(1-z)} \\
A(z) &= \tfrac{z+1}{(1-z)^2}
\end{aligned}$$

Descomponiendo en fracciones simples:

$$A(z) = \frac{z+1}{(1-z)^2} = \frac{2}{(1-z)^2} - \frac{1}{(1-z)}$$

Y puesto que $\frac{1}{(1-z)^2}$ y $\frac{1}{(1-z)}$ son las FGs de $(n+1)$ y 1^n respectivamente, se tiene que

$$A(z) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)z^n - \sum_{n=1}^{\infty} 1^n z^n$$

Lo cual implica que

$$a_n = 2(n+1) - 1 = 2n + 2 - 1 = 2n + 1$$

b.- $a_n = a_{n-1} + n(n-1), a_0 = 1$

c.- $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-1}, a_0 = a_1 = 1$
Solución: La ecuación (6.1) de la guía de elementos de teoría combinatoria del profesor Vicente Yriarte nos indica que la solución a esta ecuación es:

$$A(z) = \frac{(a_1 y_0 + y_1 - r_1)z + (y_0 - r_0) + R(z)}{1 + a_1 z + a_2 z^2}$$

Recuerda colocar la ecuación en su forma normal $a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-1} = 0$.
En nuestro caso tenemos que $a_1 = -3, a_2 = 2, y_0 = y_1 = 1, r_0 = r_1 = 0, R(z) = 0$.
Reemplazamos y queda:

$$A(z) = \frac{(-3+1)z + 1}{1 - 3z + 2z^2} = \frac{1 - 2z}{(1-2z)(1-z)} = \frac{1}{1-z}$$

. Por lo tanto la solución es: $A(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \implies a_n = 1$

3. Resuelva por funciones generatrices la siguiente relacin de recurrencia:

$$a_n = 3a_{n-1} - 4n + 3(2)^n, a_1 = 8$$

4. Determine y resuelva la relación de recurrencia para el número de formas de colocar banderas de diferente tipo en un asta de altura n (metros) usando tres tipos de banderas: las banderas rojas que tiene dos metros de alto, las banderas amarillas que tienen un metro de alto y las banderas azules con un metro de alto. Dé las condiciones iniciales.

   Solución: Las formas de colocar los tres tipos de banderas se parten disjuntamente en las formas que comienzan con una bandera amarilla, con un bandera azul y con una bandera roja. Las formas de colocar banderas en un asta de altura n metros cuando se empieza con una bandera amarilla son las formas de colocar banderas en un asta de $n-1$

metros con la bandera amarilla al principio, es decir a_{n-1} formas. Un caso análogo ocurre con las banderas azules. Con las banderas rojas se pueden colocar banderas en un asta de $n-2$ metros con una roja al principio, es decir a_{n-2}. Por lo tanto, la relación de recurrencia es:

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$$

Sea A las banderas azules, M las amarillas y R las rojas. Las condiciones iniciales son $a_1 = 2(A, M); a_2 = 5(AA, AM, MA, MM, R)$

<u>Ecuación característica:</u>
La ecuación de recurrencia la podemos expresar como:

$$a_n - 2a_{n-1} - a_{n-2} = 0$$

De aquí es fácil ver que la ecuación característica es $\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$.
Usando la resolvente obtenemos las raíces de la ecuación: $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}, \lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$
<u>Caso raíces reales distintas</u>:
<u>Solución general</u>: $a_n = c_1(\lambda_1)^n + c_2(\lambda_2)^n$. En nuestro caso: $a_n = c_1(1+\sqrt{2})^n + c_2(1-\sqrt{2})^n$

<u>Condiciones de borde</u>:
$a_0 = 2 = c_1 + c_1\sqrt{2} + c_2 - c_2\sqrt{2}$
$a_1 = 5 = c_1(1 + 2\sqrt{2} + 2) + c_2(1 - 2\sqrt{2} + 2) = c_1 + 2c_1\sqrt{2} + 2c_1 + c_2 - 2c_2\sqrt{2} + 2c_2$
De estas condiciones obtenemos las siguientes dos ecuaciones:

$$.\begin{cases} c_1 + c_1\sqrt{2} + c_2 - c_2\sqrt{2} = 2 \\ 3c_1 + 2c_1\sqrt{2} + 3c_2 - 2c_2\sqrt{2} = 5 \end{cases}$$

A partir de estas ecuaciones planteamos el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \\ 3+2\sqrt{2} & 3-2\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Resolvemos este sistema con las herramientas básicas del álgebra lineal y obtenemos los siguientes resultados (el lector los podrá verificar por su cuenta):

$$c_1 = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}, c_2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$$

<u>Solución particular:</u> $a_n = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^n + \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}(1-\sqrt{2})^n$

<u>Chequeo de los primeros terminos:</u>

Relación de recurrencia	Solución de la relación de recurrencia
$a_1 = 2$	$a_1 = \frac{(\sqrt{2}+1)(1+\sqrt{2})}{2\sqrt{2}} + \frac{(\sqrt{2}-1)(1-\sqrt{2})}{2\sqrt{2}} = ... = 2$
$a_2 = 5$	$a_2 = \frac{(\sqrt{2}+1)^3+(\sqrt{2}-1)(1-\sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}} = ... = \frac{10\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 5$