UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE EDUCACIÓN

CENTRO DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO

Máster Universitario en Estudios Avanzados en Pedagogía

CARENCIAS TRANSPOSITIVAS DE LA NOCIÓN DE DERIVADA EN BACHILLERATO

Autor: DIEGO ENRIQUE DUQUE LEDEZMA

Directora: MERCEDES HIDALGO HERRERO

Convocatoria: JUNIO 2015

Calificación obtenida en la defensa del TFM:

Agradecimientos

Para la realización del presente trabajo son muchas las personas a las cuales agradezco enormemente su contribución desde el primer día que empecé a realizarlo.

A mi tutora, que no solo creyó en mí desde el primer día que la conocí, sino que gracias su esfuerzo, persistencia, paciencia y dedicación ha logrado que todas mis ideas se hayan complementado para darle sentido a este trabajo. Ella ha logrado que cada tutoría haya sido no solo una reunión para discutir sobre lo que íbamos a hacer, sino un sitio al que, una vez terminada la sesión, yo ansiaba volver y seguir trabajando.

A mis profesores de Máster, por su invaluable tiempo, por cada pequeña pregunta y respuesta al finalizar la clase, reuniones de consulta en sus despachos y paciencia acerca de este ejemplar.

A mis familiares, quienes me han guiado a perseguir mis sueños, y que, aún estando lejos de mí, han mostrado su apoyo incondicional para cualquier decisión tomada.

A mis amigos, quienes, cuando no podía verlos, comprendieron sin ningún problema que le estaba dedicando exclusivamente mi tiempo a la realización de esta investigación.

Finalmente, a mi novia, quien nunca dejó de creer en mí en momentos que pensé que no podía realizar este trabajo. Ella ha sido una de las principales razones de donde he podido sacar fuerzas en momentos difíciles.

Para todas estas personas, ¡gracias!

RESUMEN

La derivada ha sido un contenido matemático con una amplia dificultad para la mayoría de los estudiantes de Bachillerato y universitarios. En su didáctica pueden emplearse representaciones gráficas evitando así su estudio únicamente desde un enfoque analítico. Sin embargo, se ha demostrado que existen carencias en su aprendizaje debido a la falta de ilustraciones que representen su significado.

Por tanto, para innovar y poner en práctica técnicas de aprendizaje de la derivada, se utiliza un modelo epistemológico de referencia haciendo uso de la Teoría de la Transposición Didáctica. Una vez finalizado el modelo, este se compara con currículos y libros de texto de la LOE y de la LOMCE. De esta forma se evalúan las carencias didácticas que existen hoy en día en España acerca la derivada. Tras su subsanación se podría fomentar un aprendizaje de la derivada de mayor calidad en el alumnado de Bachillerato.

Palabras clave: derivada, didáctica, modelo epistemológico de referencia, praxeologías, transposición didáctica

ABSTRACT

The derivative has been a mathematical content with a large difficulty for most high school and university students. Its didactic can use graphical representations avoiding its study uniquely from an analytical approach. However, it has been shown that there are gaps in its learning due to the lack of illustrations representing its meaning.

Therefore, to innovate and implement the practice of derivative’s learning techniques, an epistemological reference model is used by using the Theory of Didactic Transposition. Once the model is finished, it is compared to syllabuses and textbooks from the LOE and the LOMCE. Thus, it evaluates didactic gaps that exist today in Spain about the derivative. The improvements could foster a better quality learning of derivative in high school students.

Keywords: derivative, didactic, epistemological reference model, praxeology, didactic transposition

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN

El cálculo infinitesimal es un área de las matemáticas que, como se ha comprobado en (Orton, 1983) y (Heid, 1988), para considerar que se tiene un dominio de la misma, no basta con la memorización de procesos mecánicos efectivos en la resolución de ejercicios, sino que se requiere una amplia comprensión del tema, de la cual carecen tanto el profesorado en formación, como se atestigua en (Pino-Fan, Godino, Font y Castro, 2013), como los estudiantes según Orton (1983) y Heid (1988).

La derivada hace uso de un lenguaje abstracto matemático. Debido a sus amplios esquemas, simbología, aplicaciones y representaciones, ha creado en términos teóricos una de las ramas de las matemáticas con menor índice de comprensión.

> Majority of the students have multiple incomplete ways of thinking about derivative. They also have difficulties in using their knowledge about derivative to solve applied problems. If we can show that lack of complete ways of thinking about derivative impact students' abilities to solve applied problems, we can use that in enhancing our curriculum to ensure students' ways of thinking about derivative can be developed properly so they can solve the real world problems more effectively (Firouzian, 2013: 496)[1]

Se ha podido comprobar que el bajo rendimiento de los estudiantes con respecto a las derivadas ha sido trascendental no sólo en Bachillerato, sino hasta en universidades (Firouzian, 2013). Por tanto, este trabajo tiene como interés fomentar su naturaleza y su estructura científica, de cara a mejorar su didáctica en el profesorado, a través de un sistema praxeológico u organización

[1]La mayoría de los estudiantes tienen muchas formas de pensar acerca la derivada. También tienen dificultades al emplear su conocimiento para resolver problemas de aplicación de derivadas. Si podemos mostrar las carencias que tienen los estudiantes a la hora de aplicar problemas reales sobre el modo de pensar acerca las derivadas, podremos usarlo para mejorar el currículo, de modo que se garantice que las formas de pensar sobre las derivadas que tengan nuestros estudiantes puedan desarrollarse de forma adecuada para resolver de forma más efectiva problemas reales de la vida cotidiana. "Traducción del autor de este trabajo"

matemática. Para este proceso se utilizará un modelo epistemológico de referencia (de ahora en adelante MER) que partirá de cuestiones (Q_{ij}) que serán analizadas y resueltas mediante técnicas (τ_{ij}^{k}).

Tomando en cuenta la derivada como parte de la ciencia en la que se quiere profundizar, la Teoría de la Transposición Didáctica (Chevallard, 1985) y el MER como testigo del ser sabio, se pretenderá responder a las cuestiones siguientes: ¿qué enseñar de la derivada? ¿cómo enseñar la derivada? Para ello una vez conocido qué se quiere enseñar y cómo, al culminar el MER, se compararán las cuestiones y técnicas empleadas con currículos de la LOE (BOE, 2007) y de la LOMCE (BOE, 2014) y libros de texto vigentes de la LOE. Así se podrá resaltar cómo se podría contribuir a mejorar el proceso de enseñanza/aprendizaje de la derivada.

Se consideran los currículos de la LOE y de la LOMCE pues, si bien es la primera la vigente en el presente curso académico, la segunda entra en vigor en Bachillerato el próximo curso académico.

Finalmente, a partir de los resultados obtenidos, se realizará un análisis de cómo estas cuestiones y técnicas pueden contribuir en el ámbito científico-educacional para así generar un cambio positivo y significativo en el profesorado con respecto de la didáctica de las derivadas.

2. MARCO TEÓRICO

2.1. Las matemáticas

Las matemáticas han sido una ciencia de gran importancia en la historia de la humanidad ya que han servido como lenguaje universal para cada uno de nosotros. Se dice que su práctica empezó aproximadamente 70.000 años a.C. Sin embargo, fueron los griegos quienes la perfeccionaron y le dieron la importancia que se conoce hoy en día.

> Si bien la historia de la matemática no comienza con los griegos, resulta conveniente tomar a Grecia como punto de partida. […] La conveniencia resulta solamente de la continuidad histórica que puede establecerse, a partir de los helenos, en un proceso cuyas etapas sucesivas pueden seguirse paso a paso hasta nuestros días, a pesar de un cúmulo de incertidumbres iniciales. (Piaget y García, 2008: 88)

El uso de esta ciencia ha servido como herramienta fundamental en el desarrollo del ser humano durante el último milenio. Más aún, las matemáticas son una ciencia que se encuentra en continuo desarrollo y su aprendizaje ha sido un requisito para todos los estudiantes.

> The definition of mathematics used as a basis for MEBA[2] is one which looks at both the processes and products involved in thinking mathematically. It is our belief that:
>
> Mathematics is an area of investigation which logically analyzes ordering, operational, and structural relationships.
>
> Other definitions focus on mathematics as a tool or collection of skills that can be applied to questions of "how many" or "how much." These definitions quite often concentrate on the application of calculation skills to everyday problems involving quantification. Some adults comment that they must not be good at math because they cannot balance their checkbooks. Another view of mathematics is that it is a science which involves logical reasoning, drawing conclusions from assumed premises systematized knowledge, and/or strategic reasoning based on accepted rules, laws, or probabilities (decision analysis). Mathematics might also be defined as an art which studies patterns for predictive purposes. Another common view of mathematics is that it is a specialized language which deals with form, size, and quantity. (Gilfeather y Del Regato, 1999: 2)[3]

---

[2] Mathematics Experience-Based Approach. En castellano: Experiencia de matemáticas en aproximaciones de base.

[3] La definición de las matemáticas usada como base para el MEBA es una que encara ambos, procesos y productos involucrados que se encuentran al pensar matemáticamente. Es nuestra creencia que:

Las matemáticas es un área de investigación que analiza lógicamente las relaciones de orden, operacionales y estructurales.

Otras definiciones enfocan las matemáticas como una herramienta o colección de habilidades que pueden ser aplicadas a preguntas como "cuántos" o "cuánto es". Estas definiciones se concentran a menudo en la aplicación de las habilidades de cálculo en los problemas de la vida diaria que involucran cantidades. Algunos adultos comentan que no son buenos en matemáticas porque no pueden balancear sus talonarios de cheques. Otra visión de las matemáticas es que

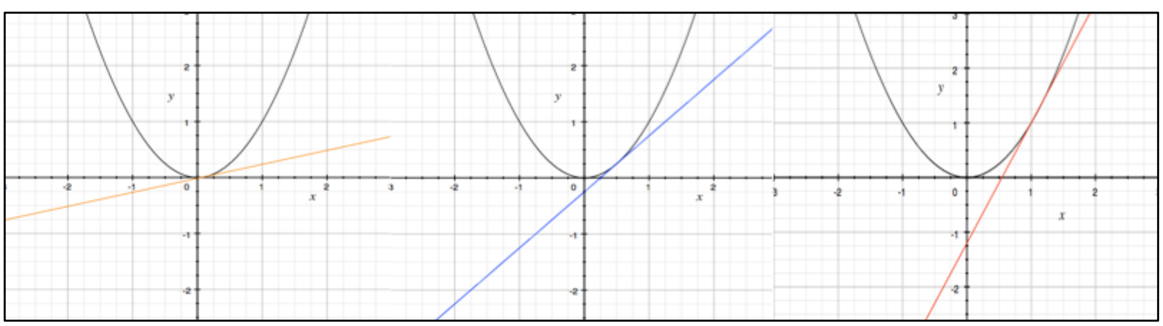
2.1.1. Derivada

El concepto matemático objeto de estudio en este TFM son las derivadas. Históricamente su origen proviene de Newton y Leibniz. Sus definiciones surgen a raíz del estudio del concepto del cálculo infinitesimal. Existen varios conceptos acerca las derivadas, sin embargo se hará uso exclusivamente a las derivadas con respecto a las matemáticas y a la física.

Por un lado, los matemáticos explican que la derivada se refiere al grado de inclinación de una curva en un punto específico. También hacen referencia a máximos y mínimos. Por otra parte, los físicos definen las derivadas como la magnitud del cambio de posición de un cuerpo en un determinado momento, aspecto que también será abordado en este trabajo.

Haciendo énfasis en el concepto matemático que se va a emplear, véase por ejemplo el comportamiento de la curva de la figura 1.1 y nótese cómo a medida que la curva asciende la inclinación de la recta que toca a la curva en un solo punto[4] crece también:

Figura 2.1 COMPORTAMIENTO DE LA CURVA



Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

---

es una ciencia que involucra razonamiento lógico, sacando conclusiones a partir de premisas asumidas, conocimiento sistemático y/o razonamiento estratégico basado en reglas aceptadas, leyes o probabilidades (análisis de decisión). Las matemáticas pueden ser también definidas como un arte que estudia patrones con propósitos de predicción. Otro punto de vista común de las matemáticas es que son un lenguaje especializado que trata tamaño y cantidad. “Traducción del autor de este trabajo”

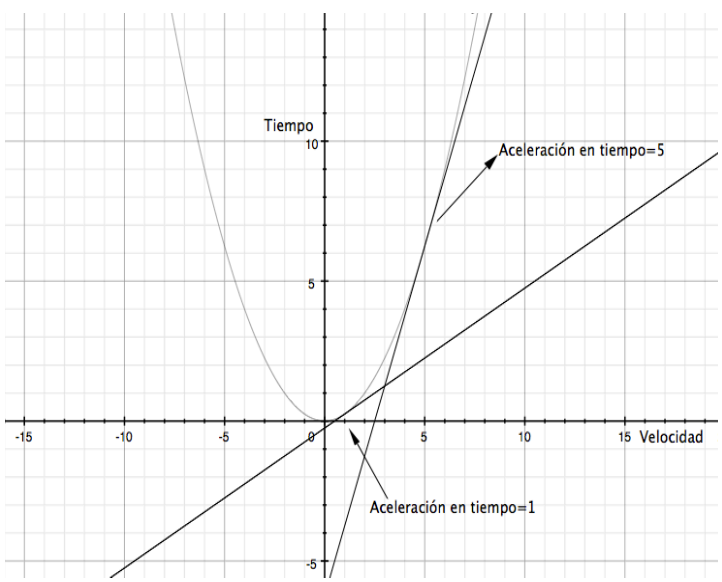
[4] Recta tangente

Este cambio en la inclinación de la recta en diferentes puntos para determinar el comportamiento de la curva es el estudio la derivada.

En el ámbito de la física, considérese por ejemplo un vehículo que se encuentra en reposo (su velocidad es 0 km/h). Empieza a acelerar y se toma nota de sus velocidades en el segundo 1 y en el segundo 5. Estas son de 0.25 km/h y de 6.25 km/h respectivamente. En el tiempo transcurrido se produjo un incremento positivo de velocidad. La derivada de la velocidad es la aceleración, ya que hay un cambio de la misma a medida que se acelera.

Adaptando las representaciones gráficas del concepto matemático explicadas anteriormente cambiando el eje *y* por tiempo y el eje *x* por velocidad, se obtiene la representación de la figura 2.2:

Figura 2.2 LA ACELERACIÓN COMO DERIVADA



Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

Se observa que a medida que se aumenta la aceleración, la velocidad aumenta más rápidamente con respecto al tiempo. Por lo tanto, éste incremento, representa nuevamente el concepto general de la derivada.

2.2. Historia y epistemología de la derivada

Según Platón, la epistemología es la rama de la filosofía encargada del estudio de la ciencia ya lograda. Por otro lado, un concepto de epistemología más contemporáneo, según Dancy (1991), es:

> También llamada teoría del conocimiento, la epistemología es el estudio del conocimiento y de la justificación de la creencia. Entre cuestiones centrales a las que tratan de responder los epistemólogos están ¿Qué creencias están justificadas y cuáles no?, Si hay algo que podamos conocer, ¿Qué es?, ¿Cuál es la relación entre conocer y tener una creencia verdadera?, ¿Cuál es la relación entre ver y conocer?. Cuestiones como éstas están en el corazón de la epistemología, pero, por supuesto, ésta va más allá y, como cualquier otra disciplina filosófica, sus fronteras son más bien difusas. (Dancy, 1991: 15)

Las derivadas, en este caso, serán parte de la ciencia ya lograda que se quiere profundizar, pero ¿existe algún modelo matemático que pueda estructurar su enseñanza? Para esto se introducirá MER que se explicará más adelante.

Históricamente, las derivadas se han puesto en práctica desde la época de los griegos. Sin embargo, fue durante la primera etapa del modernismo cuando se intensificó su estudio generando grandes contribuciones en las matemáticas. Véase a continuación una breve reseña acerca la evolución epistemológica con respecto a la derivada partiendo del siglo XVI:

> Desde los griegos, se plantearon cuatro problemas fundamentales que al ser resueltos en XVI-XVII, dieron vida a la función derivada, fueron ellos: El de la velocidad, el de la recta tangente, el de área bajo una curva y el de máximos y mínimos.
>
> Hasta el siglo XVI, los matemáticos retoman el trabajo de los griegos respecto a los procesos de variación para resolver problemas que se planteaban desde la mecánica, en ese sentido se retoman los trabajos de Eudoxio y de Arquímedes sobre el método de exhausión para hallar áreas bajo curvas.
>
> En este período el rigor matemático cambia respecto del usado por los griegos (Geométrico), se hace necesario buscar nuevas formas de demostrar los procesos matemáticos distintos a los de la geometría y del álgebra, se estudian

> las relaciones del movimiento, áreas bajo curvas, recta tangente y máximos y mínimos como procesos de variación.
>
> Se encuentran diferencias en el rigor utilizado por los matemáticos de esta época y en ese sentido por ejemplo se destacan los trabajos de Fermat, Descartes, Galileo y de Barrow. En general, los trabajos de estos matemáticos en el cálculo, antecedieron al de Newton (1643-1727) en su teoría de fluxiones y al de Leibniz (1646-1716) en la teoría infinitesimal.
>
> Tanto Newton como Leibniz, usaron los infinitésimos y los infinitos e intentaron dejarlos de lado por las críticas que algunos pensadores como Berkeley (1685-1753) les hicieron, este hecho marca otra etapa más en el avance del rigor matemático el cual tuvo que esperar hasta los trabajos de Cauchy (1789-1957) a quien se le atribuye el rigor actual de las matemáticas, la definición y la definición de función derivada. (Ramírez, 2009: 160-161)

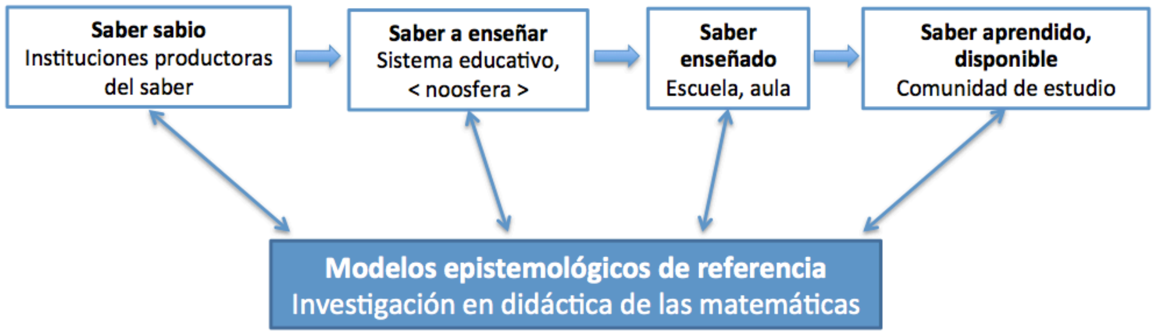
Nótese que el área por debajo de la curva forma parte de la epistemología de la derivada. Sin embargo, pero no por menos importante, como se dijo anteriormente, este trabajo no se va a profundizar en este concepto. Sólo hará énfasis en la recta tangente a la curva, extremos locales y la magnitud de cambio en diferentes momentos determinados, dejando los otros aspectos como líneas futuras de investigación.

2.3. La Teoría de la Transposición de la Didáctica

Presentada por Chevallard (1985), la transposición didáctica hace referencia al conjunto de transformaciones que sufre el saber con objeto de que sea aprendido. Muestra los caminos de cómo realizar la transición del saber sabio al saber aprendido y contribuye a la preparación de la enseñanza de los estudiantes. En otras palabras, la transposición didáctica es el proceso mediante el cual tanto el profesor como otros profesionales y grupos sociales toman un conocimiento y lo transforman con el propósito de que los estudiantes lo adquieran.

El esquema de la transposición didáctica comprende cuatro estados. Estos son: saber sabio, saber a enseñar, saber enseñado y saber aprendido. Su representación viene dada por el esquema de la figura 2.3 y serán definidos a continuación.

Figura 2.3 ESQUEMA DE TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA



Fuente: (BOSCH Y GASCÓN, 2007)

De acuerdo con González y Díaz (2008), el saber sabio:

> Hace referencia a los procesos metódicos de producción de conocimientos nuevos, tradicionalmente conocidos con el nombre de investigaciones científicas, pero existe también otro conocimiento, donde lo metódico se denomina estilo, y también genera conocimientos nuevos; es el caso del arte, otro tipo de saber; ambas, las ciencias y las artes, tienen sus respectivas manifestaciones técnicas y tecnológicas. El saber sabio elabora su propio discurso, que suele comunicarse mediante un lenguaje científico o estético. (González y Díaz, 2008: 84).

La siguiente parte del esquema corresponde al saber a enseñar. En esta fase Chevallard (1991), explica que:

> Un contenido de saber que ha sido designado como saber a enseñar, sufre [...] un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para ocupar un lugar entre los objetos de enseñanza. El "trabajo" que transforma de un objeto de saber a enseñar en un objeto de enseñanza, es denominado la transposición didáctica. (Chevallard, 1991: 45)

El sistema educativo será el escenario donde se pondrá en práctica el saber a enseñar. Para realizar el proceso que transforma el saber sabio en saber a enseñar, Bosch y Gascón (2007) enfatizan que para este primer proceso es indispensable plantearse una serie de preguntas, tales como “¿Qué saberes se eligen? ¿Cómo se organizan? ¿Cómo se los denomina? ¿Por qué esos y por qué ese tipo de organizaciones? ¿Qué razones motivan esas elecciones? Etc.” En la determinación del saber a enseñar participará la noosfera, es decir, el sistema didáctico interactúa con el resto de la sociedad.

> El estudio de la trayectoria recorrida por el saber escolar, permite visualizar las diversas influencias recibidas tanto del saber científico como de otras fuentes. El conjunto de las fuentes de influencias que actúan en la selección de los contenidos que serán parte de los programas escolares y que determinan todo el funcionamiento del proceso didáctico recibe el nombre de noosfera (Chevallard). Forman parte de la noosfera: científicos, profesores, especialistas, políticos, escritores de textos y otros agentes de la educación. (De Faria, 2006: 5)

Hoy en día se puede observar que en muchas instituciones educativas la práctica del profesorado en cualquier asignatura no solo exige un alto conocimiento de la materia, sino que su práctica tenga altos niveles de estudios de pedagogía y didáctica. Esto define la siguiente fase del esquema de transposición didáctica: saber enseñado.

Grisales y Gonzales (2006) cita a Giroux (1990) que asevera que “los profesores son intelectuales transformativos, donde intelectual hace referencia a una base teórica para examinar el trabajo de los docentes […]. Esto hace que los profesores asuman todo su potencial como académicos y profesionales activos y reflexivos de la enseñanza”. Por lo tanto, Grisales y Gonzales (2006) exponen que:

> La practica del profesor debe ser profesional, es decir, que esté respaldada de un cuerpo teórico sobre pedagogía y didáctica. Esto le permite al docente tomar parte activa en el proceso de enseñanza, no solo seleccionando los contenidos que va a enseñar, sino reflexionando sobre la manera de enseñarlos. (Grisales y González, 2006: 81).

Se ha observado que, cuando el profesorado se dispone a enseñar, no necesariamente logrará que sus alumnos puedan obtener el aprendizaje. Es posible que, a pesar de que se cumplan los primeros tres pasos efectivamente del esquema de la transposición didáctica, el alumno no logre generar un cambio significativo en su aprendizaje. Esto comprende al último paso del esquema: saber aprendido.

Esta fase hace referencia a la verificación de la transposición didáctica. En otras palabras, este paso hará constar por medio de evaluaciones, que el alumno demuestre no solo a nivel oficial sus conocimientos en la institución donde se desempeña, sino un cambio en su nivel de formación independiente.

Para dar forma al saber sabio, se desarrollará un MER que ayudará a plantear más adelante el estudio de la didáctica de la derivada.

2.3.1. Modelo Epistemológico de Referencia

El MER consiste en el proceso de estructuración de una ciencia de cualquier medio, que intenta explicar una teoría o fenómenos nuevos, en general, en forma más sencilla (Dancy, 1991). En este caso, el MER juega un papel importante en el problema didáctico en torno a las derivadas. Según Fonseca, Gascón y Lucas (2014), este se desarrollará por medio de un esquema de praxeologías matemáticas cuyo comportamiento genera ramificaciones que amoldan y presentan el contenido que se quiere tratar de forma explícita y sistemática. Por lo tanto, “en cuanto a la manera concreta de describir el MER, digamos aquí únicamente que suele hacerse mediante una red de cuestiones y respuestas donde éstas tienen estructura praxeológica” (Fonseca, Gascón y Lucas, 2014: 291). Estas cuestiones serán vistas más adelante junto a sus técnicas de resolución con respecto a las derivadas.

El MER llevará a cabo un esquema amplio, conciso, y representativo que beneficiará la comprensión de la transposición didáctica de las derivadas. Este hará énfasis en tres problemas partiendo de cuestiones relacionadas con funciones, pendientes, rectas tangente, curvas y tasas de variación media. Su estructura de basará en praxeologías, noción definida a continuación.

2.3.2. Praxeologías

“Toute activité humaine régulièrement accomplie peut être subsumée sous un modèle unique, que résume ici le mot de praxéologie[5]” (Chevallard, 1999: 221). “La noción de praxeología u organización matemática constituye la herramienta fundamental para modelizar cualquier actividad matemática” (Corica y Otero, 2009: 308) , y consta de dos niveles:

> El nivel de la praxis o del saber hacer, que engloba un cierto tipo de tareas y cuestiones que se estudian, así como las técnicas para resolverlos.
>
> El nivel del logos o del saber, en el que se sitúan los discursos que describen, explican y justifican las técnicas que se utilizan, los cuales reciben el nombre de tecnología. Dentro del saber se postula un segundo nivel de descripción-explicación-justificación (esto es, el nivel tecnología de la tecnología) que se denomina teoría. (Corica y Otero, 2009: 308)

De ahora en adelante para las tareas, técnicas, tecnología y teoría se utilizarán las siguientes determinaciones respectivamente: $[\mathrm{T}/Q, \tau, \theta, \circledast]$. Para este trabajo se hará uso principalmente de las tareas y técnicas ya que permiten realizar los posteriores análisis de saber a enseñar y saber enseñado. Puntualmente se harán incursiones tecnológicas.

2.4. Referencias legislativas

Cómo se mencionó en la introducción, este trabajo se llevará a cabo mediante un análisis de la Ley Orgánica de Educación (de ahora en adelante LOE) y Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (de ahora en adelante LOMCE) con respecto al MER.

2.4.1. LOE

[5] Cualquier actividad humana realizada a menudo puede ser considerada bajo un modelo único, que resume aquí el término praxeología. “Traducción del autor”

De este marco legislativo va a considerarse únicamente el curriculum de Matemáticas para Bachillerato y no en su conjunto, sino aquellos contenidos y criterios de evaluación relacionados con el objeto de este trabajo, a saber, aquellos relacionados con la derivada. Dicho curriculum queda recogido en el Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del Bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas (BOE, 2007).

2.4.2. LOMCE

Para este análisis se considerará el curriculum proveniente del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato (BOE, 2014). Para la LOMCE, al igual que con la anterior, se ejercerá una comparación de cuestiones en este curriculum de Bachillerato en matemáticas. Todos estos manuales escolares corresponden al marco legislativo de la LOE. No se consideran libros de texto de la LOMCE, ya que esta entra en vigor en el próximo curso y no existen libros de texto de acuerdo con dicha ley para dicha etapa educativa.

2.5. Referencia de libros de texto

Con respecto al análisis comparativo del MER, se utilizarán cuatro libros de texto de matemáticas. Dos libros de primero de Bachillerato y dos libros de segundo de Bachillerato. Los textos a utilizar son: Matemáticas I, editorial Anaya (Colera, Oliveira, García y Santaella, 2009), Matemáticas II, editorial Anaya (Colera y Oliveira, 2009), Matemáticas 1, editorial Oxford (Bascós y Pena, 2008) y Matemáticas 2, editorial Oxford (Bascós y Pena, 2008). A partir de su estudio, se pretende analizar y verificar si se utilizan las técnicas planteadas en el MER.

2.6. Estado de la cuestión

Existen diferentes tipos de investigaciones sobre de la derivada. En los estudios de por Orton[6] (1983), se realizaron actividades para alumnos que evaluaban las derivadas de forma genérica a especifica, es decir, desde los ejercicios más homogéneos a los más abstractos. Una vez concluida, no solo se pudieron detectar errores estructurales del núcleo del concepto de la derivada, sino también errores que llevaban a una serie de eventos que perjudicarían su aprendizaje. Según López de los Mozos (1991), los diferentes errores habituales en la didáctica de las derivadas son:

> Errores estructurales: aquellos que implican una comprensión errónea del concepto.
>
> Errores operatorios: los que se producen en el desarrollo y ejecución de las operaciones algebraicas necesarias para la resolución del ejercicio.
>
> Errores arbitrarios: engloban todos los que son fruto del azar y de una eventual falta de atención por motivos internos o debido al contexto de la prueba (López de los Mozos, 1991: 8)

En cuanto a las investigaciones de Heid (1988), esta autora comprueba por medio de sus estudios que la mayoría los estudiantes tiende a memorizar conceptos claves matemáticos en vez de comprenderlos rigurosamente y aplicarlos al realizar ejercicios. Para su experimentación, utilizó el concepto de la derivada en dos clases: una tradicional y otra sólo con ordenadores. Tras hacer varias evaluaciones, concluyó que los alumnos que utilizaban los ordenadores para representar gráficamente las derivadas mostraron mejor rendimiento y comprensión del tema. Heid sostiene que si a los estudiantes se les brinda la oportunidad de demostrar sus conocimientos no solo por ejercicios tradicionales[7], sino con práctico-teóricos[8], entonces el uso de los conceptos no servirían para ser memorizados sino aplicados.

Por otro lado, estudios sobre la didáctica de la derivada en formación del

[6] No solo se enfocó en el estudio la de la didáctica de las derivadas, sino en fomentar los errores básicos que los estudiantes cometían al resolver problemas matemáticos
[7] Calcula la derivada de la siguiente función: $\mathrm{f(x)} = 6\mathrm{x}^3 - 2\mathrm{x}^2$
[8] Discute por qué la siguiente función no es una parábola y represéntala: $\mathrm{f(x)} = 6\mathrm{x}^3 - 2\mathrm{x}^2$

profesorado realizados por Pino-Fan, Godino, Font y Castro (2013) a través del cuestionario EF-DMK (Epistemic Facet -Didactic-Mathematical Knowledge Model[9]) explican que:

> The results obtained through the implementation of the questionnaire EF-DMK- Derivative show that the prospective teachers manifest difficulties to solve tasks related, not only to the specialized and extended content knowledge but also, with the common content knowledge. It is clear that the prospective teachers have a better performance when solving tasks that entail the use of the derivative as the slope of a tangent line. This was confirmed when the prospective teachers solve tasks […] where their answers show a disconnection among the different derivative meanings. The manifested inadequacies of knowledge, justify the pertinence of designing specific formative actions in order to develop the epistemic facet of the didactic-mathematical knowledge on the derivative […]. Secondly, the two levels of the specialized content knowledge should be considered, both in its application level (use of linguistic elements, concepts, properties, procedures and justifications, as well as the use of different derivative partial meanings to solve the tasks) and in its identification level The latter refers to the competency to identify mathematics objects, their meanings and the relation among them. This prospective teacher's competence would allow a suitable learning management of their future students[10] (Pino-Fan, Godino, Font y Castro, 2013: 8-9)

Según estas investigaciones, es claro que la falta de comprensión de la derivada no solo afecta a los estudiantes, sino al profesorado en formación cuando se enfrentan a ejercicios acerca de su razonamiento teórico, generando fallos con respecto al contenido. Obsérvese cómo a través de estudios presentados por

---

[9] Faceta Epistémico-Didáctica del Modelo Matemático de Conocimiento

[10] Los resultados obtenidos por medio de la aplicación del cuestionario EF-DMK-la derivada muestran que el profesorado en formación manifiesta dificultades para resolver ejercicios relacionados, no solo acerca su conocimiento extenso y especializado sino también con el conocimiento teórico. Es claro que el profesorado en formación obtiene mejores resultados al resolver ejercicios que conllevan un uso de las derivadas como pendiente de la recta tangente. Esto fue confirmado cuando el profesorado en formación realizó actividades en las que sus respuestas muestran discrepancia conceptual acerca las derivadas. La falta de conocimiento justifica la pertinencia de diseñar acciones formativas específicas para el desarrollo de la faceta epistémica del conocimiento matemático-didáctico de la derivada.

En segundo lugar, los dos niveles de conocimiento de contenido especializado deben ser considerados, tanto en su nivel de aplicación (uso de elementos lingüísticos, conceptos, propiedades, procedimientos y justificaciones, así como el uso de diferentes significados de las derivadas para resolver las tareas) y en su nivel de identificación. Este último se refiere a la competencia para identificar los objetos matemáticos, sus significados y la relación entre ellos. Esta competencia en los profesores de formación permitirá una gestión adecuada del de sus futuros estudiantes. "Traducción del autor de este trabajo"

Dolores (2000) acerca el estudio de la enseñanza de la didáctica de la derivada se evidencian más aún las investigaciones de Orton (1983) y Heid (1988) por medio de actividades referentes a la comprensión de la derivada.

> Se han mostrado evidencias de que la mayoría de estudiantes no tienen formadas ideas correctas sobre la derivada y no la relacionan con los problemas de la variación. Por esta razón nos proponemos como objetivo de la investigación, la elaboración de una Propuesta Didáctica que contribuya a la comprensión del concepto de derivada. Asumiendo que el desarrollo de ideas variacionales, principalmente la noción de rapidez de la variación, puede contribuir al logro de este propósito. (Dolores, 2000: 14).

Al igual que Dolores, este trabajo investigará propuestas didácticas para el desarrollo de la enseñanza de la derivada.

3. OBJETIVOS

La presente investigación se guía por el siguiente objetivo general:

> Estudiar el tratamiento matemático-didáctico de la derivada en Bachillerato.

Este planteamiento se desglosa en los siguientes objetivos específicos:

1- Identificar tipos de tares resolubles mediante la derivada.
2- Explicitar técnicas intuitivas conducentes a la definición infinitesimal de la derivada.
3- Detectar carencias en la transposición didáctica de la derivada en Bachillerato.

4. HIPÓTESIS

Como hipótesis de investigación se plantean las siguientes:

1- No se aborda la aproximación intuitiva al concepto de la derivada ni en el currículo de Bachillerato de la LOE ni en el de la LOMCE.
2- No se aborda la aproximación intuitiva al concepto de derivada en los libros de texto de Bachillerato.
3- No se consideran técnicas de aproximaciones sucesivas a la derivada.

5. METODOLOGÍA

Como se ha mencionado en la introducción de este trabajo, esta investigación utilizará el MER como herramienta para analizar y comparar los currículos y los libros de texto de la LOE y de la LOMCE a través de cuestiones (Q_{ij}) que serán analizadas y resueltas mediante técnicas (τ_{ij}^{k}) haciendo énfasis en la Teoría de Transposición Didáctica (Chevallard, 1985). Por tanto, la metodología empleada se acomoda a las siguientes fases:

1. Análisis bibliográfico
2. Realización de un MER
3. Análisis transpositivo
   3.1 Análisis comparativo del saber a enseñar con respecto al MER creado en la fase 2
   3.2 Análisis comparativo del saber enseñado con respecto al MER creado en la fase 2

6. PLAN DE ACTUACIÓN

El MER está estructurado en cuestiones y técnicas que servirán para la revisión y análisis de currículos y libros de texto de matemáticas de Bachillerato, específicamente en las derivadas. A continuación se describe el MER.

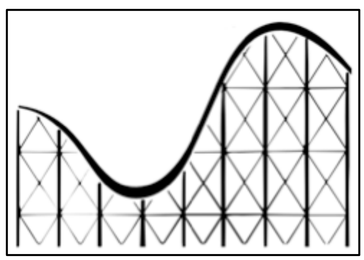
6.1. Modelo Epistemológico de Referencia

El MER, para iniciar el sistema praxeológico, considera la cuestión Q_0. Esta hace un estudio acerca el movimiento de vagones en montañas rusas. Luego, por medio de Q_1, se estudiará la trayectoria del movimiento de una tabla sobre un cilindro. Finalmente se concluye el MER a través de Q_2 que analiza variaciones de velocidad con respecto al tiempo.

6.1.1. Predicción de trayectorias de descarrilamiento de vagones en montañas rusas

La figura 6.1 representa una pista similar a las de las montañas rusas.

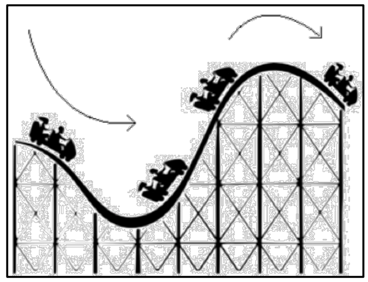
FIGURA 6.1 PISTA



Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

Obsérvese cómo se mueve un vagón a medida que avanza por dicha pista (figura 6.2).

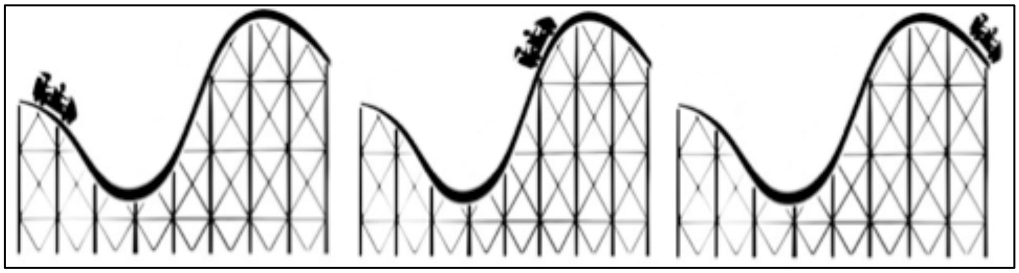
FIGURA 6.2 PISTA CON VAGONES EN MOVIMIENTO



Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

Nótese la transición de los vagones por detallado mientras se van moviendo por encima de la pista, es decir, puntos concretos de la pista que recorre el móvil (figura 6.3).

FIGURA 6.3 PISTA CON TRANSICIÓN DE VAGONES



Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

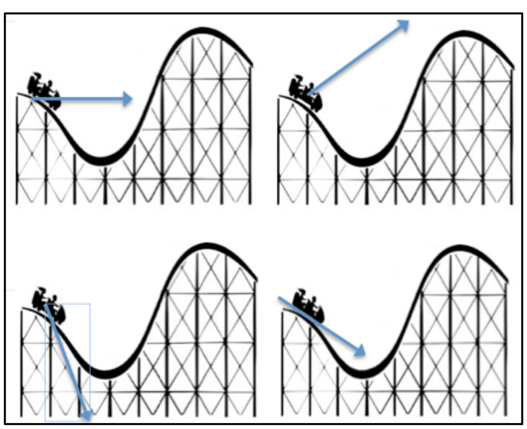
La cuestión Q_0 plantea si es posible predecir la posición de un móvil en descarrilamiento en montañas rusas.

6.1.1.1. Trayectoria de descarrilamiento

Se plantea la siguiente cuestión:

Q_{00} Imagine que en un momento de su recorrido el vagón descarrila. ¿Qué trayectoria seguirán los vagones al desprenderse? La flecha azul en la figura 6.4 muestra una posible dirección. ¿Cuál seguirá el vagón al descarrilar?

FIGURA 6.4 POSIBLES TRAYECTORIAS DE DESCARRILAMIENTO



Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

Técnica:

Para esta actividad, se pueden observar las figuras detalladamente e imaginar la trayectoria de los vagones cuando avancen sobre la pista. Ahora bien, el vagón descarrila en un determinado momento. La idea es estudiar, en momentos específicos de descarrilamiento, la dirección en la cual saldría disparado el vagón. Para esto se pueden poner en práctica los siguientes planteamientos de resolución o técnicas:

$\boldsymbol{\tau_{00}^1}$ Imaginarse de forma intuitiva cómo descarrilaría el vagón. Dibujarlo y comparar con las respuestas posibles.

$\boldsymbol{\tau_{00}^2}$ Colocar algún objeto no más grande que una pelota de tenis en diferentes recorridos, empujarlo con una fuerza moderada en varias oportunidades y observar cómo sale disparado al desprenderse de la vía o soporte de la trayectoria. Realizar esto un número suficiente de veces y tomar nota acerca lo que sucede.

Ahora bien, una vez realizada esta actividad de manera intuitiva, se interpretará éste y los siguientes ejercicios con enfoque matemático introduciendo funciones y la ecuación de la recta. Se asumirá que estos últimos conceptos ya son conocidos.

6.1.1.2. Trayectoria de descarrilamiento específica

$\boldsymbol{Q_{01}}$ ¿Se podría ser más concreto al predecir la trayectoria de descarrilamiento realizando un análisis según la ecuación de la trayectoria?

Técnica:

Para la realización de esta actividad, se tendrá que escribir la ecuación de la recta tangente a la curva en determinado momento. Está recta describirá la trayectoria del vagón al desprenderse de la pista.

Los siguientes pasos describirán la *técnica* $\boldsymbol{\tau_{01}^{1}}$ para hallar dicha ecuación:

1- Concretar funciones que describan las trayectorias de las pistas con las que se piense trabajar. En este caso se elegirán:

Pista 1: Trayectoria que sube y baja en forma de U invertida: $f(x) = -x^2$
Pista 2: Trayectoria que describe varios ascensos y descensos: $f(x) = x^3 - 3x$
Pista 3: Trayectoria que asciende solamente: $f(x) = \sqrt{x}$

2- Escoger el punto donde el móvil descarrilaría, es decir, por dónde pasaría la recta tangente que es ecuación de la trayectoria del descarrilamiento[11].

3- Buscar dos puntos que pertenezcan a la función de manera que el punto del paso 2 se encuentre entre los dos puntos que se eligen ahora.

4- Escribir la ecuación de la recta con los dos puntos que se han elegido en el paso 3.

5- Representar trayectoria y recta gráficamente[12].

6- Al observar cómo se aproxima la recta a la curva, si no es tangente a esta, disminuir la distancia entre ambos puntos acercándose al punto de descarrilamiento. Aplicar este mismo procedimiento hasta obtener una “buena” aproximación a la recta tangente en el punto de descarrilamiento.

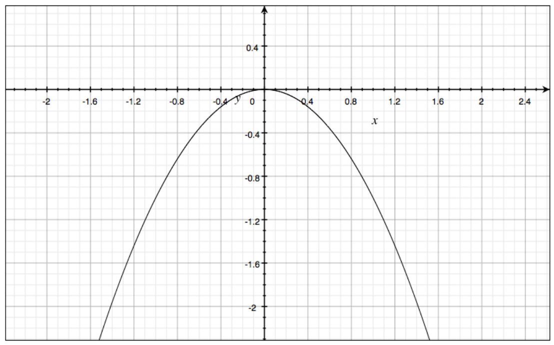
---

[11] En adelante se tomarán aproximaciones decimales de ciertos resultados.
[12] Se han representado gráficamente las funciones empleando Grapher de Mac, pero podría emplearse cualquier software de representación de funciones.

7- Comprobar por método algebraico si la aproximación de la recta es válida, es decir, si es tangente a la función en el punto de descarrilamiento.

Se comenzará trabajando con la pista 1, cuya representación gráfica está en la figura 6.5.

FIGURA 6.5 REPRESENTACIÓN DE LA CURVA $f(x) = -x^2$



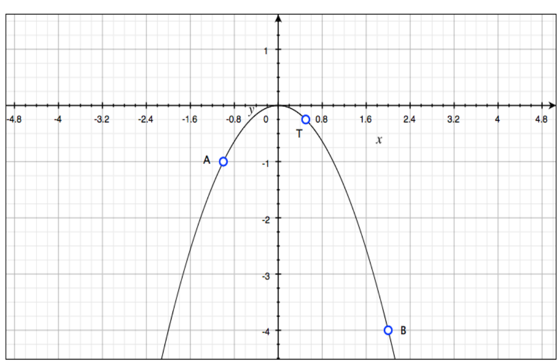
Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

Para el punto T y los puntos extremos A y B se obtiene la siguiente tabla:

	T	A	B
x	0.5	-1	2
y	-0.25	-1	-4

Al representarlos en $f(x) = -x^2$ se obtiene la figura 6.6.

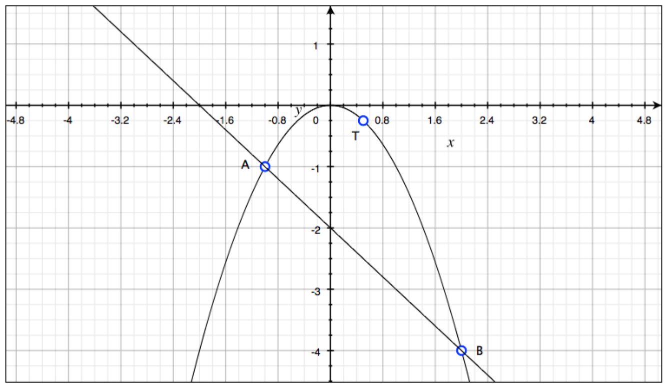
Figura 6.6 PUNTOS T, A Y B EN LA CURVA



Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

Uniendo A con B se obtiene la recta AB: $y = -x - 2$ representada en la figura 6.7.

Figura 6.7 REPRESENTACIÓN DE LA RECTA AB EN LA CURVA

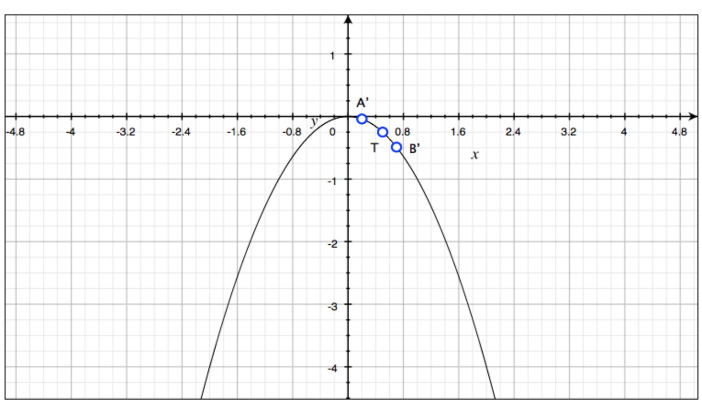


Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

Al observar que la recta AB está alejada del punto T, se acotará la distancia entre los puntos A y B. Se trazarán nuevos puntos, estos serán A' y B', cuyas coordenadas se dan en la siguiente tabla y son representados en la figura 6.8.

	A'	B'
x	0.2	0.7
y	-0.04	-0.49

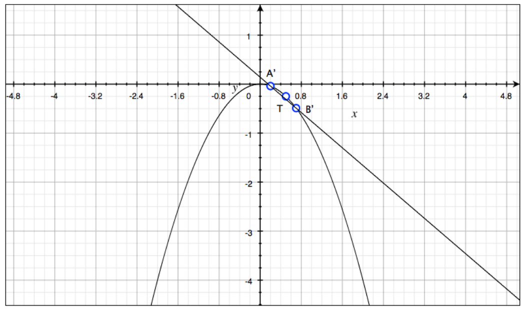
Figura 6.8 PUNTOS A' Y B' EN LA CURVA



Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

Al unir A’ con B’ se obtiene la recta A’B’: $y = -0.9x + 0.14$ (figura 6.9).

Figura 6.9 REPRESENTACIÓN DE LA RECTA A’B’ EN LA CURVA



Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

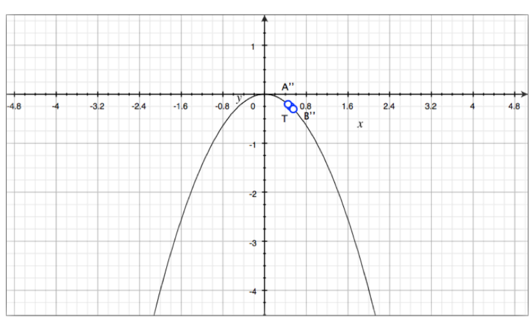
Como se puede notar, A’B’ está ya más cerca del punto T. Por lo tanto, se debe acotar estos puntos un poco más para así lograr una aproximación válida. Obsérvese que la pendiente de la recta A’B’ es -0.9.

Los puntos A’’ y B’’ estarán mas cerca de T, y estos son:

	A''	B''
x	0.45	0.55
y	-0.2025	-0.3025

Representados por la figura 6.10.

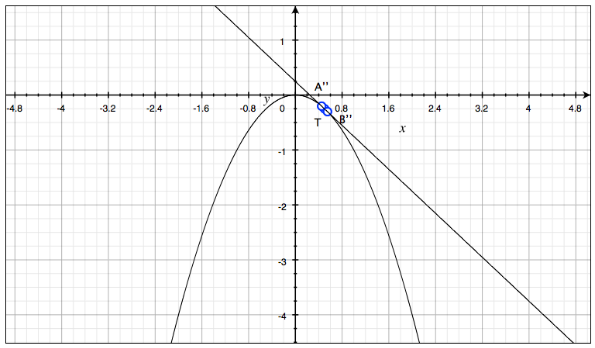
Figura 6.10 PUNTOS A” Y B” EN LA CURVA



Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

Al unir A’’ con B’’ se obtiene la recta A’’B’’: $y = -x + 0.2475$, representada en la figura 6.11.

Figura 6.11 REPRESENTACIÓN DE LA RECTA A”B” EN LA CURVA



Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

Al observar el comportamiento de las rectas AB, A’B’, y A’’B’’ se puede notar, a medida que se acotan las coordenadas en *x*, cómo se van aproximando las rectas tangencialmente a $f(x)$ en T. Por lo tanto en este caso, una buena aproximación a la recta tangente en el punto T será A’’B’’: $y = -x + 0.2475$.

Obsérvese que la pendiente de la recta A’B’ es -1.

Para decidir si la recta es tangente o no se aplicará la técnica algebraica, procediendo de la siguiente manera:

Al intersecar las ecuaciones de las rectas AB, A’B’ y A’’B’’ con la trayectoria, se podrá observar cómo los puntos obtenidos van aproximándose a T.

Para $f(x) \cap AB$ se obtiene:

Igualando ⇒ $-x^2 = -x - 2$
Agrupando ⇒ $-x^2 + x + 2 = 0$
Aplicando $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ se obtiene: $x_1 = -1$ y $x_2 = 2$

Por lo tanto los puntos obtenidos son $A(-1,-1)\ y\ B(2,-4)$. Estos puntos están cerca de T pero no lo suficiente.

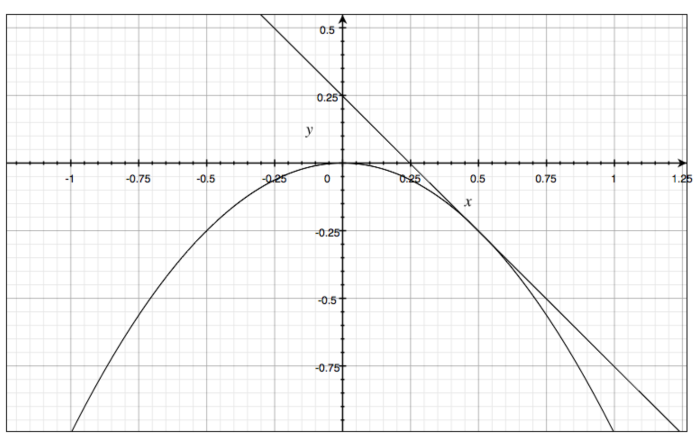
Acotando y aplicando el mismo proceso anterior, para la recta A’B’ se obtienen los puntos $A'(0.2,-0.04)\ y\ B'(0.7,-0.49)$. Al igual que los puntos A y B; A’ y B’ están cerca de T pero podrían estarlo un poco más.

Finalmente para la recta A’’B’’ se obtienen los puntos A’’ y B’’: $A"(0.45,-0.2025), B"(0.55,-0.3025)$. Estos puntos se aproximan lo suficiente a T.

Observando las sucesivas rectas que se intersecaron con $f(x)$, parece que la pendiente de la recta tangente va a ser -1. Por tanto, se procede a calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto T y tiene pendiente -1.Tras representarla gráficamente observamos si es tangente a la trayectoria o no.

Aplicando $y - y_1 = m(x - x_1)$ con el punto T se obtiene: $y = -x + 0.25$. Y al representarla, se observa la figura 6.12.

Figura 6.12 REPRESENTACIÓN DE LA RECTA TANGENTE LA CURVA



Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

La recta es tangente a $f(x)$ en T. Más aún, para comprobar que en el punto T la recta es tangente a $f(x)$, basta con intersecarla con $f(x)$ y obtener el punto de intersección T:

Igualando⇒ $-x^2 = -x + 0.25$

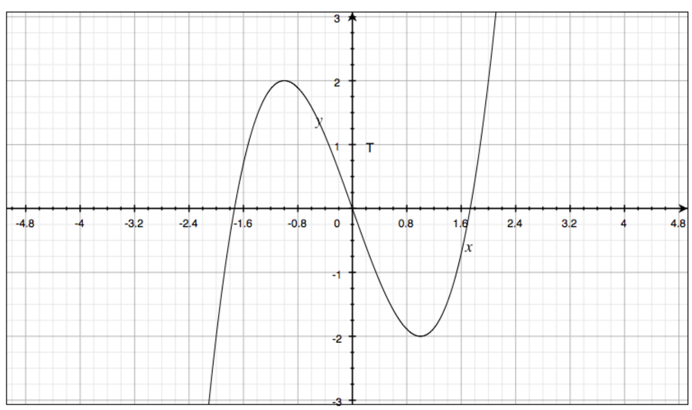
Agrupando⇒ $x^2 - x + 0.25 = 0$

Aplicando $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ se obtiene: $x_1 = x_2 = 0.5$

Finalmente, sustituyendo en la ecuación de la recta $-0.5 + 0.25 = -0.25$ se comprueba que el punto de tangencia es efectivamente T(0.5, -0,25)

Se procede ahora con la pista 2, representada en la figura 6.13.

Figura 6.13 REPRESENTACIÓN DE LA CURVA $f(x) = x^3 - 3x$



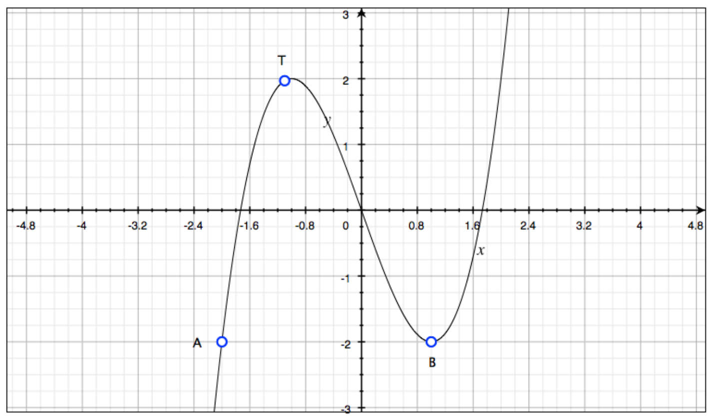
Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

Se selecciona esta función porque hay rectas que son tangentes solo localmente, no como sucedería en la pista 1.

Para analizar el descarrilamiento en el punto T(1.1, 1.969), se seleccionan los siguientes puntos A y B representados en la figura 6.14.

	T	A	B
x	-1.1	-2	1
y	1.969	-2	-2

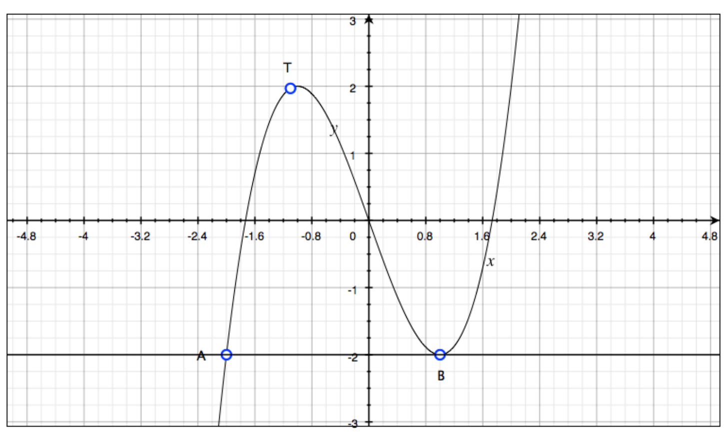
Figura 6.14 REPRESENTACIÓN DE PUNTOS T, A Y B EN LA CURVA



Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

Uniendo A con B se obtiene la recta AB: $y = -2$ (figura 6.15).

Figura 6.15 REPRESENTACIÓN DELA RECTA AB EN LA CURVA



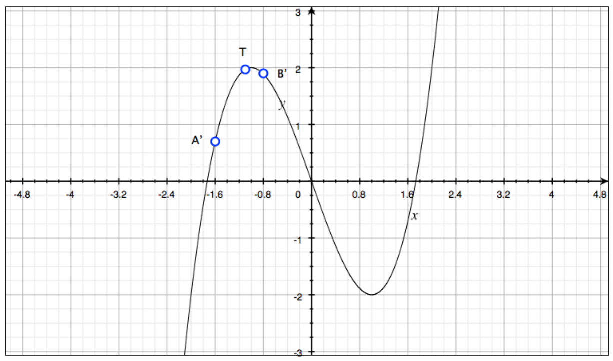
Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

Dado que la recta AB está lejos de ser tangente en T, se procede con los puntos A’ y B’, generados a partir del acotamiento de distancia entre puntos A y B:

	A'	B'
x	-1.6	-0.8
y	0.704	1.888

Estos son representados en la figura 6.16.

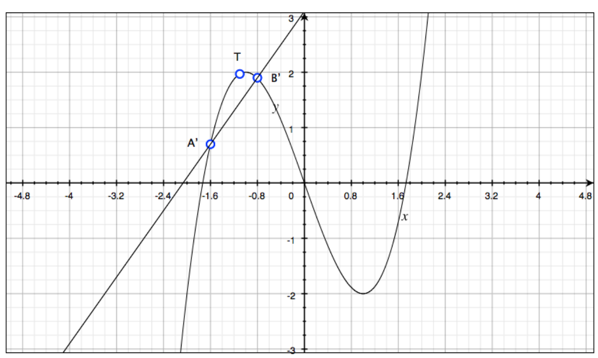
Figura 6.16 REPRESENTACIÓN DE PUNTOS A’ Y B’ EN LA CURVA



Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

Uniendo A’ con B’ se obtiene la recta A’B’: $y = 1.48x + 3.072$ (Figura 6.17).

Figura 6.17 REPRESENTACIÓN DE LA RECTA A’B’ EN LA CURVA



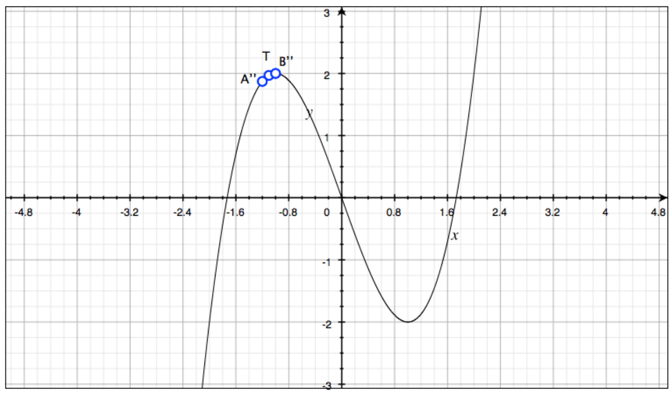
Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

La recta A’B’ no es tangente a la curva, por tanto, de nuevo se procede a acotar más la distancia, seleccionando los puntos A’’ y B’’, generados a partir del acotamiento de distancia entre puntos A’ y B’:

	A''	B''
x	-1.2	-1
y	1.872	2

A'' y B'' son representados en la figura 6.18.

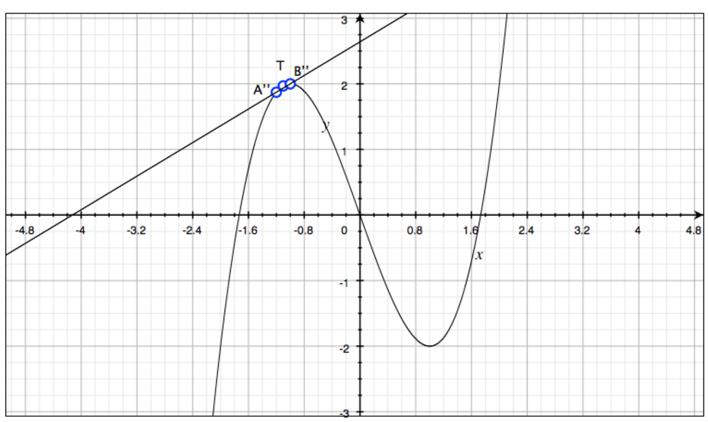
Figura 6.18 REPRESENTACIÓN DE PUNTOS A" Y B" EN LA CURVA



Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

Uniendo A'' con B'' se obtiene la recta A''B'': $y = 0.64x + 2.64$ (figura 6.19).

Figura 6.19 REPRESENTACIÓN DE LA RECTA A"B" EN LA CURVA



Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

Una aproximación válida a la recta tangente a T en $f(x)$ será A''B'' es $y = 0.64x + 2.64$.

Al aplicar el procedimiento algebraico se obtiene:

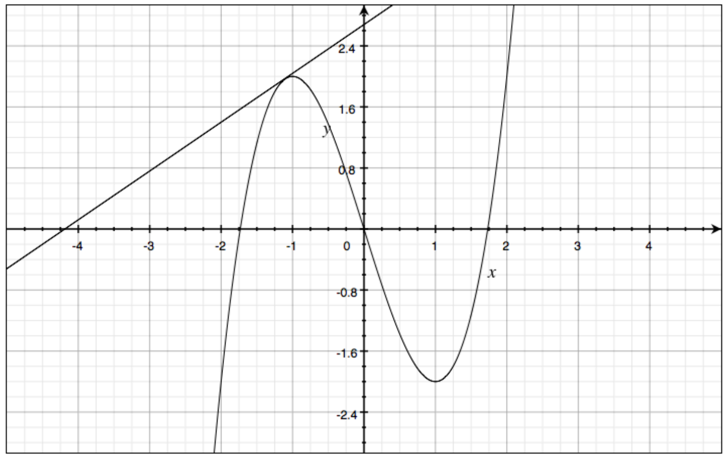
Para $f(x) \cap AB$:

Igualando ⇒ $x^3 - 3x = -2$
Agrupando ⇒ $x^3 - 3x + 2 = 0$
Aplicando el método de factorización de Ruffini se obtiene: $x_1 = -2 \; y \; x_2 = x_3 = 1$

Finalmente $AB(-2) = -2$ y $AB(1) = -2$

Estos puntos pertenecientes a la recta *AB* se acercan a T pero no lo suficiente. Al aplicar el mismo proceso que se hizo para $f(x) = -x^2$ para *A'B'* y *A"B"*, se logra obtener una buena aproximación al punto T(-1.1, 1.969) partiendo de la intersección de$f(x) \cap A"B"$. Logrando aproximar tangencialmente la recta A''B'' a T obteniendo $A"B"$: $y = 0.64x + 2.6$. Nótese que la pendiente se va acotando a medida que se acerca a T. Por lo tanto, observando las sucesivas rectas que se intersecaron con $f(x)$, parece que la pendiente de la recta tangente va a estar comprendida entre $0.62 < m < 0.64$. Por consiguiente, se procede a calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto T y tenga como pendiente 0.63. Tras representarla gráficamente observaremos si es tangente a la trayectoria o no. Aplicando $y - y_1 = m(x - x_1)$ con $m = 0.63$ y el punto T se obtiene: $y = 0.63x + 2.662$. Al representarla se observa el carácter tangencial (figura 6.20).

Figura 6.20 REPRESETACION DE LA RECTA TANGENTE A LA CURVA



Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

Para corroborar si es punto de tangencia, se procede a intersecar $y = 0.63x + 2.662$ con $f(x) = x^3 - 3x$.

Igualando⇒ $x^3 - 3x = 0.63x + 2.662$
Agrupando⇒ $x^3 - 3.63x - 2.662 = 0$

Aplicando el método de factorización de Ruffini se obtiene: $x_1 = x_2 = -1.1$ y $x_3 = 2.2$, lo que implica que la recta interseca a $f(x)$ en dos puntos. Sin embargo, como T tiene coordenada $x = -1.1$ y coincide con x_1 y x_2, entonces se toma únicamente esta solución ya que la otra corresponde a un punto de la gráfica alejada de T. Se observa aquí el carácter local de la tangencia.

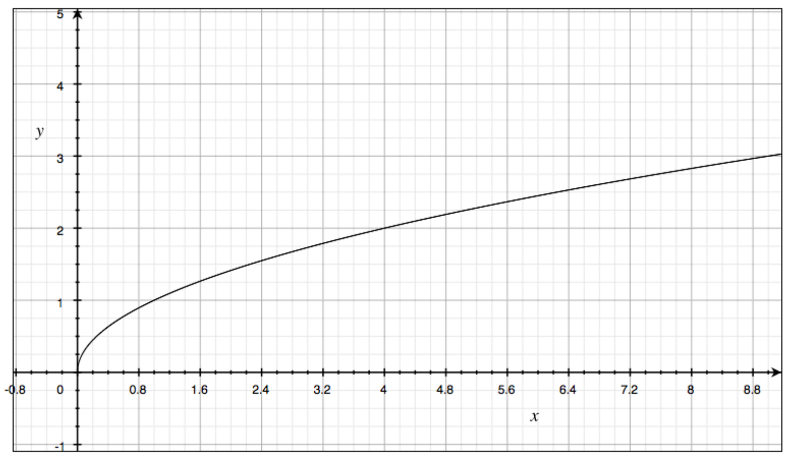
Finalmente $f(-1.1) = 1.969$ comprobando que el punto de tangencia es efectivamente T(-1, 1.969)

La tecnología que justifica y explica la técnica descrita para ambas es la siguiente definición de derivada para cualquier punto T:

$$f'(T_x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(T_x + h) - f(T_x - h)}{2h}$$

Finalmente para la pista 3 se tiene de la figura 6.21. Esta pista solo aumenta en altura, no hay subidas ni bajadas.

Figura 6.21 REPRESENTACIÓN DE LA CURVA $f(x) = \sqrt{x}$



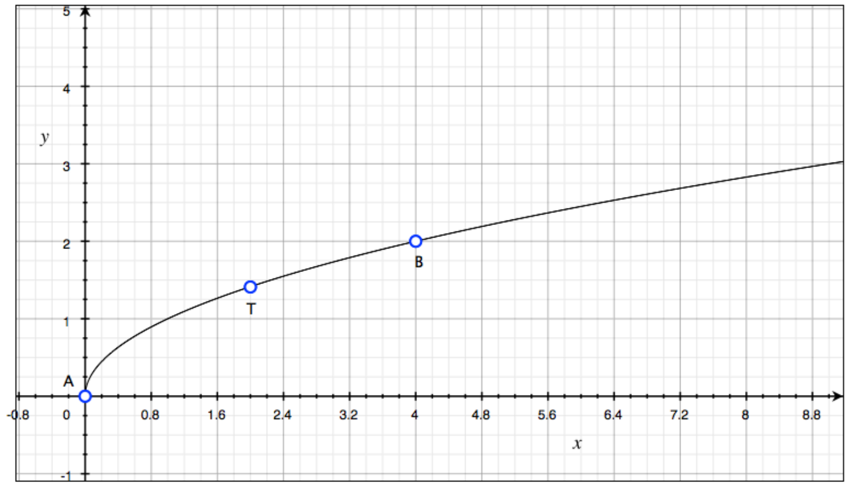
Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

Se procede a aplicar la *técnica* τ_{01}^{1} de nuevo. Para el siguiente punto T, se eligen los puntos A y B:

	T	A	B
x	2	0	4
y	$\sqrt{2}$	0	2

Representados en la figura 6.22:

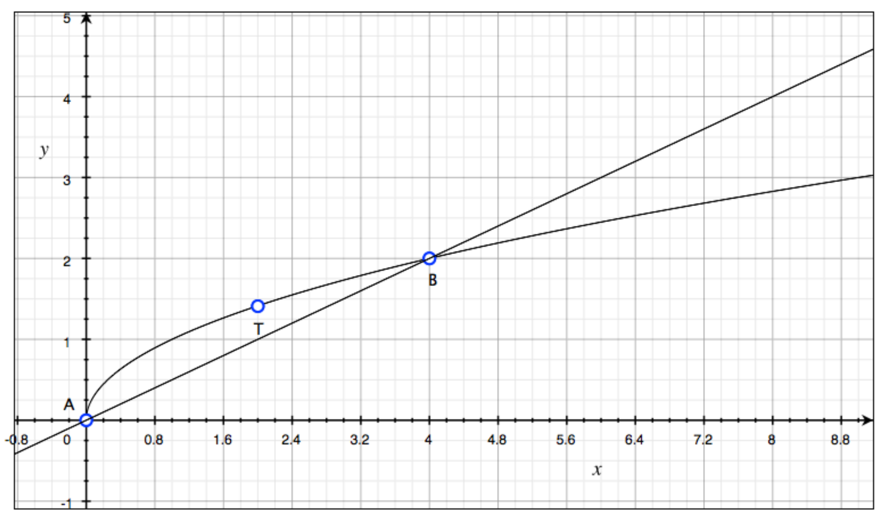
Figura 6.22 REPRESENTACIÓN DE PUNTOS T, A Y B EN LA CURVA



Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

Uniendo A con B se obtiene la recta AB: $y = 0.5x$ (figura 6.23).

Figura 6.23 REPRESENTACIÓN DE LA RECTA AB EN LA CURVA



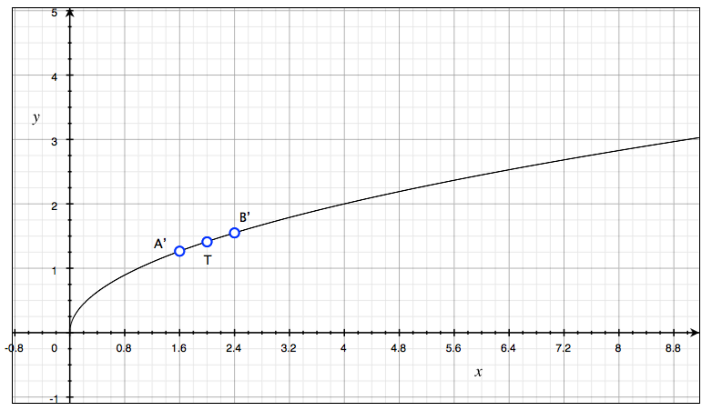
Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

Se seleccionan los puntos A’ y B’, generados a partir del acotamiento de distancia entre puntos A y B:

	A'	B'
x	1.6	2.4
y	$\sqrt{1.6}$	$\sqrt{2.4}$

Cuya representación se recoge en la figura 6.24.

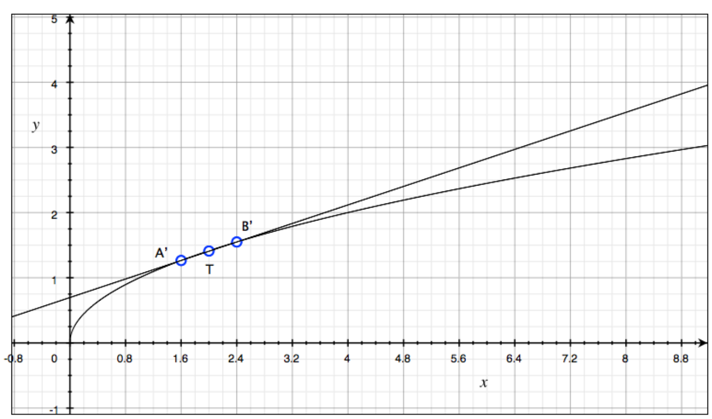
Figura 6.24 REPRESENTACIÓN DE LOS PUNTOS A' Y B'



Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

Uniendo A' con B' se obtiene la recta A'B': $y = 0.35535x + 0.6964$ (figura 6.25).

Figura 6.25 REPRESENTACIÓN DE CURVA Y RECTA



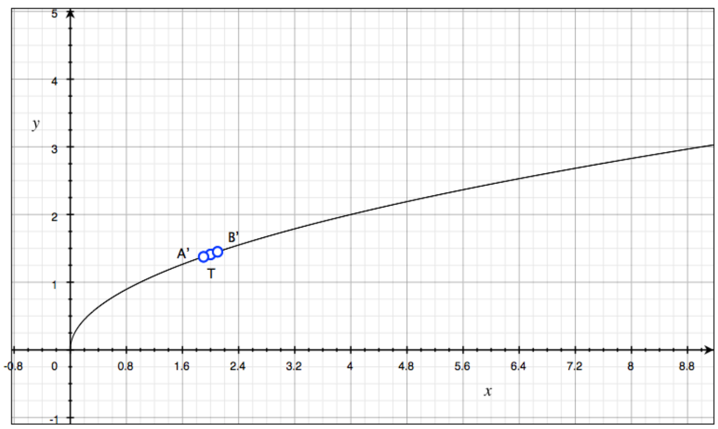
Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

Se procede con los puntos A’’ y B’’, generados a partir del acotamiento de distancia entre puntos A’ y B’:

	A''	B''
x	1.9	2.1
y	$\sqrt{1.9}$	$\sqrt{2.1}$

Representados en la figura 6.26.

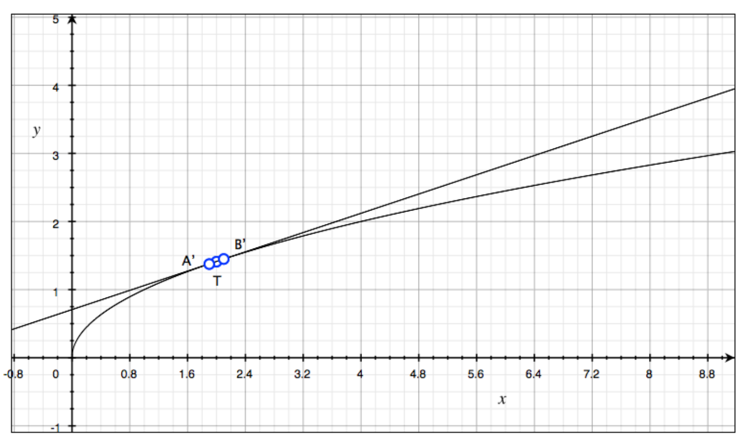
Figura 6.26 REPRESENTACIÓN DE PUNTOS A” Y B” EN LA CURVA



Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

Uniendo A’’ con B’’ se obtiene la recta A’B’: $y = 0.3537x + 0.70644$ (figura 6.27).

Figura 6.27 REPRESENTACIÓN DE LA RECTA A”B” EN LA CURVA



Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

De igual forma que el ejemplo anterior, una aproximación a la recta tangente a T en $f(x)$ será A’’B’’: $y = 0.3535x + 0.70675$.

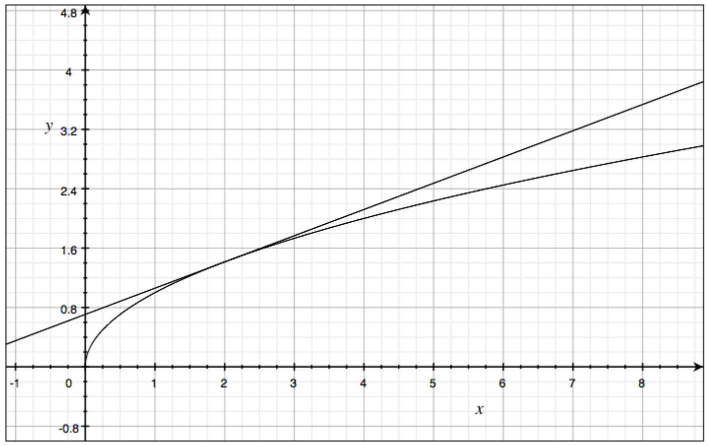
Al igual que las pistas anteriores al aplicar el proceso algebraico a se obtiene:

Para $f(x) \cap AB$:

Igualando ⇒ $\sqrt{x} = 0.5x$
Agrupando ⇒ $0.25x^2 - x = 0$
Aplicando $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ se obtiene: $x_1 = 0 \; y \;\; x_2 = 4$
Finalmente $AB(0) = 0$ y $AB(4) = 2$

Estos puntos se acercan a T(2, $\sqrt{2}$) pero no lo suficiente. Al aplicar el mismo proceso que se hizo para las pistas anteriores, se logra aproximar tangencialmente la recta A’’B’’ a T obteniendo $A"B"$: $y = 0.3537x + 0.70644$. Nótese que la pendiente se acota a medida que se acerca a T. Por lo tanto, observando las sucesivas rectas que se intersecaron con $f(x)$, parece que la pendiente de la recta tangente va a estar comprendida entre $0.3535 \leq m \leq 0.3537$. Por consiguiente, se procede a calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto T y tenga pendiente 0.3536. Tras representarla gráficamente se podrá observar si es tangente a la trayectoria o no. Aplicando $y - y_1 = m(x - x_1)$ con el punto T se obtiene: $y = 0.3536x + 0.707$. Y al representar la figura 6.28 se observa el carácter tangencial.

Figura 6.28 REPRESENTACIÓN DE LA RECTA TANGENTE LA CURVA



Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

La técnica vista puede ser variada tomando en lugar de puntos A y B, solo uno de ellos y el punto T de descarrilamiento. Se observaría así como es la pendiente según se aproxima por cada lado.

Se puede analizar más sobre descarrilamientos, como por ejemplo la siguiente cuestión.

6.1.1.3. Momentos de descarrilamiento y colisión del vagón

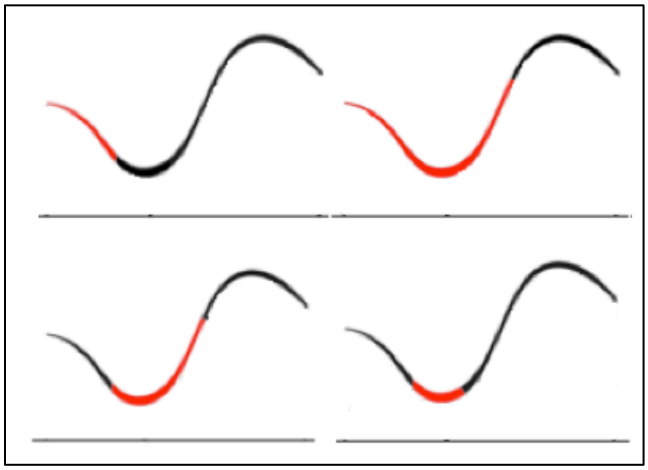
$\boldsymbol{Q_{02}}$ ¿En qué momentos cree usted que al desprenderse el vagón, este hará colisión con la pista? En este caso no se considerará una montaña rusa sino un tren desplazado sobre unas curvas sobre superficie plana para que la colisión tenga lugar siguiendo la recta de descarrilamiento.

Técnica:

$\boldsymbol{\tau_{02}^{1}}$ En este caso, se quiere saber en qué momentos podría colisionar el vagón con raíles cuando descarrile. Para esto, hay que crear posibles recorridos de colisión a partir de la trayectoria del vagón en momentos específicos.

Una forma de realizar escenarios de colisión es colocar el vagón en diferentes partes de la pista y observar en qué dirección podría desprenderse. Las pistas (figura 6.29) en color rojo serán zonas en las cuales cuando el vagón descarrile habrá colisión. Por ejemplo:

Figura 6.29 ESCENARIOS DE COLISIÓN



Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

6.1.1.4. Momentos de descarrilamiento y colisión específicos del vagón

$\boldsymbol{Q_{03}}$ ¿Se podría ser más concreto si se conociera la ecuación de la trayectoria del móvil?

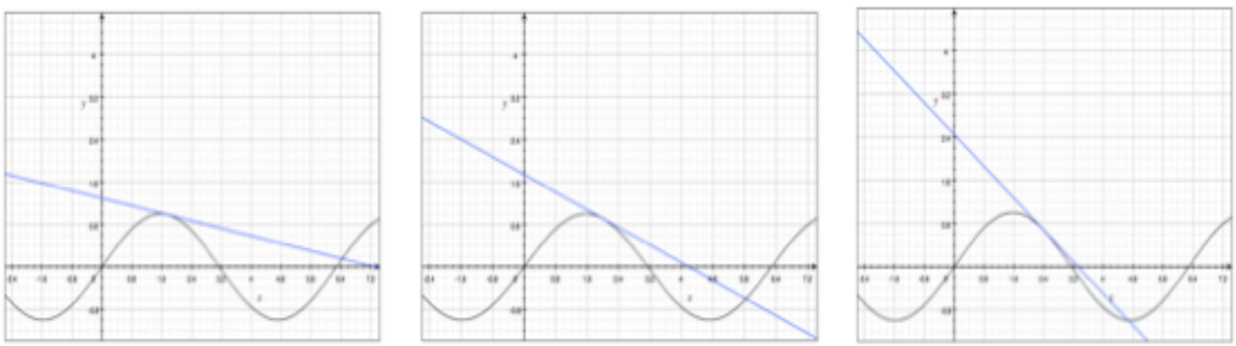
Técnica

$\boldsymbol{\tau_{03}^{1}}$ Se pueden variar los momentos en los cuales se crea que el vagón descarrile y colisione. Para encontrar esto de forma general a partir de una función, basta con encontrar rectas tangentes en diferentes puntos de la curva, pero que a su vez sean secantes con la misma en otros puntos. De esta forma se podrá trazar el recorrido en el que implique colisión con la pista.

Para dichas rectas, se aplicará el mismo procedimiento que se realizó en $\boldsymbol{Q_{01}}$ Esto es, escoger un punto T de descarrilamiento, luego tomar puntos ambos lados de T pertenecientes a la misma, y acotar poco a poco dichos puntos hasta construir la recta que se deseé. Por ejemplo:

Tomando como trayectoria $f(x) = sen(x)$. Al aplicar el procedimiento anterior y construyendo varias rectas como describe la figura 6.30, observe como estas son tangentes y van inclinándose de izquierda a derecha en las siguientes representaciones.

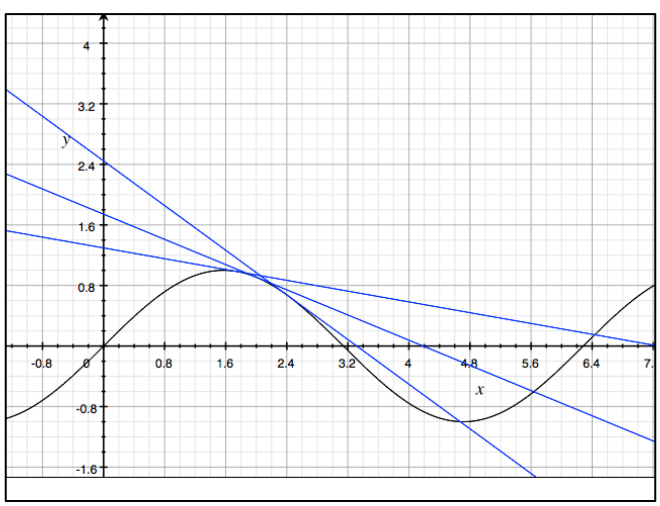
Figura 6.30 REPRESENTACIONES DE RECTAS TANGENTES EN LAS CURVAS



Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

Agrupando las tres rectas tangentes sobre la misma curva se pueden observar en la figura 6.31 sus tendencias de inclinación.

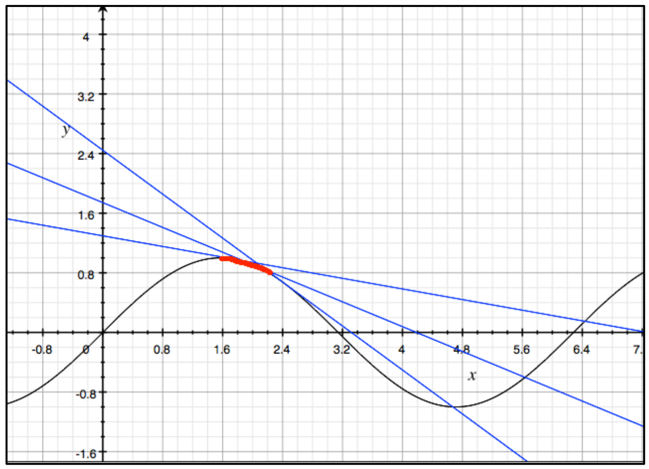
Figura 6.31 REPRESENTACIÓN DE AGRUPACION DE RECTAS TANTGENTES A LA CURVA



Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

En la figura 6.32, se puede notar trazando en rojo la distancia recorrida por las rectas tangentes que colisionan con otro punto de la función.

Figura 6.32 REPRESENTACIÓN DE DISTANCIA RECORRIDA DE RECTAS TANGENTES EN LA CURVA



Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

En este ejemplo específico, el recorrido entre los primeros y últimos puntos de tangencia sería el trozo de la trayectoria en el cual cuando el vagón descarrile colisionará con la pista. Esta cuestión ha sido considerada para que no se genere la idea de tangente como intersección en un único punto, sino que este carácter tangencial puede ser local. De este modo se pretende eliminar las dificultades del paso de una concepción global de la tangente a una concepción local, pues según (Dolores, 2000) la primera supone un obstáculo para la segunda.

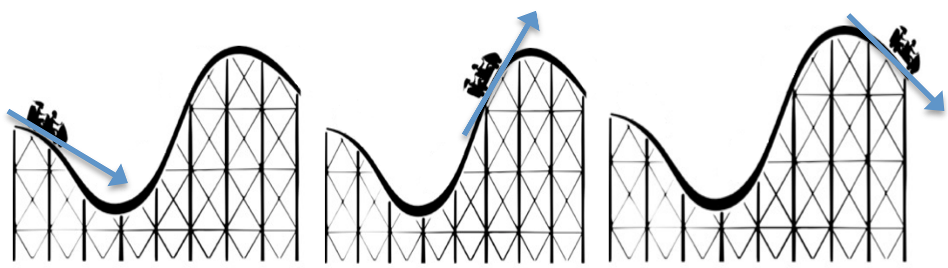
6.1.1.5. Momentos de trayectoria horizontal del vagón

En la siguiente cuestión se estudiaran extremos locales.

$\boldsymbol{Q_{04}}$ Basándose nuevamente en la montaña rusa, ¿En qué momento el vagón estará situado horizontalmente?

τ_{04}^{1} A partir de los resultados obtenidos en Q_{01} se deberá estudiar la dirección en la cual el vagón descarrilaría. Esta podrá proporcionar en un determinando momento la inclinación en el cual el vagón se encuentra específicamente. La flecha indicará el grado de inclinación del vagón. Para este problema es necesario conseguir una o más flechas horizontales sobre la pista en diferentes momentos tangentes a la misma. La realización de varios diagramas de estudio para estos casos son representados en la figura 6.33.

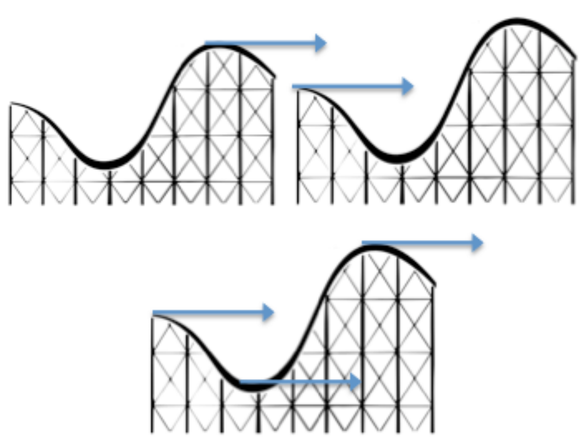
Figura 6.33 REPRESENTACIÓN DE ESTUDIO DE GRADO DE INCLINACION DEL VAGÓN



Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

Es claro que los tres diagramas anteriores no logran el objetivo. Por lo tanto es necesario crear cuantos diagramas sean necesarios como muestra la figura 6.34 hasta conseguir flechas horizontales que pasen por la pista.

Figura 6.34 REPRESENTACIÓN DE POSICIONES HORIZONTALES DEL VAGÓN EN LA PISTA



Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

Finalmente el último diagrama indica tres posiciones en las cuales el vagón tendrá una inclinación horizontal en esta pista.

6.1.1.6. Momentos de trayectoria horizontal específica del vagón

$\boldsymbol{Q_{05}}$ ¿Se podrían determinar posiciones horizontales de manera más precisa si se conociera la ecuación de la trayectoria del móvil?

La *técnica* $\boldsymbol{\tau_{05}^{1}}$ describirá el cálculo de la recta tangente horizontal para cualquier $f(x)$, cuando sea aplicable:

Sustituyendo la pista por una función, se trazará una recta horizontal en un punto aleatorio y se trasladará lo necesario hasta aproximarla a un punto donde se quiera que sea tangente.

Se llamará T el punto que se quiere aproximar en la pista: $f(x) = \begin{cases} \frac{8sinx}{x} & x \neq 0 \\ 8 & x = 0 \end{cases}$.

Esta función será de gran ayuda para lograr este objetivo ya que se podrá trazar más de una recta tangente horizontal en la misma.

Los siguientes pasos determinarán la *técnica:*

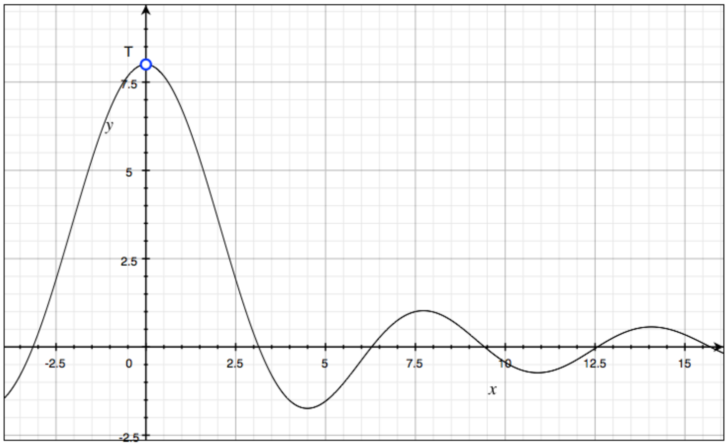
1- Determinar $m = 0$ y proponer una recta.

2- Intersecar gráficamente recta y trayectoria.

3- Comprobar en qué puntos de corte de la recta con la gráfica la última, en un intervalo próximo al punto, se sitúa totalmente por debajo o totalmente por arriba de la recta.

Véase el punto T(0, 8) en $f(x)$ en la figura 6.35:

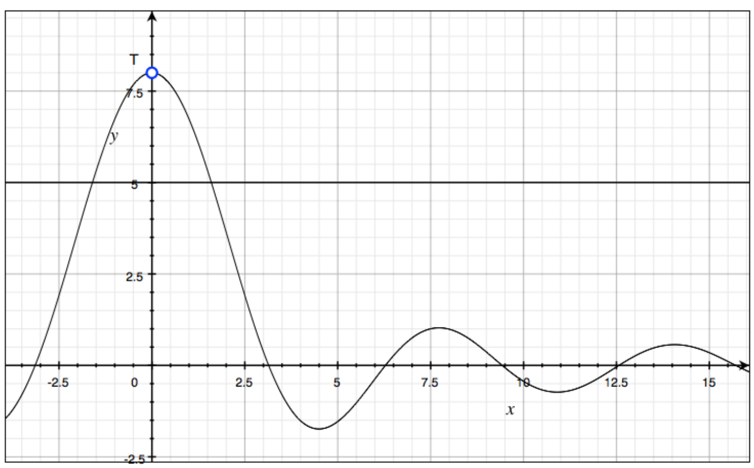
Figura 6.35 REPRESENTACIÓN DEL PUNTO T EN $f(x)$



Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

Al incorporar $y = 5$ en la representación anterior se obtiene la figura 6.36:

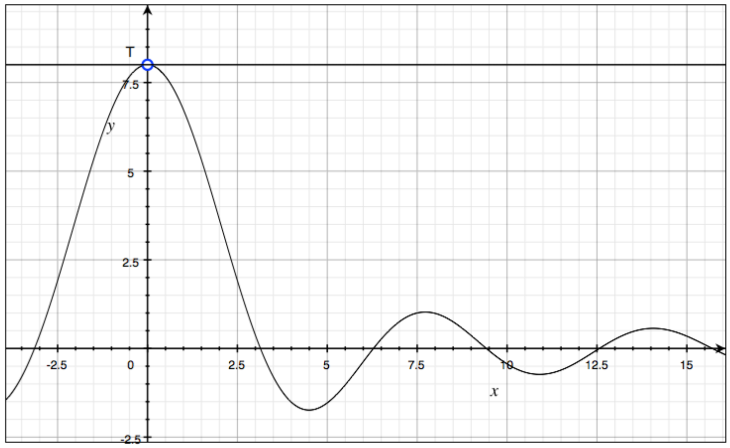
Figura 6.36 REPRESENTACIÓN DE LA RECTA *y*=5 Y $f(x)$



Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

Al incrementar y tres unidades, se obtiene la intersección de la recta en la curva, como muestra la figura 6.37:

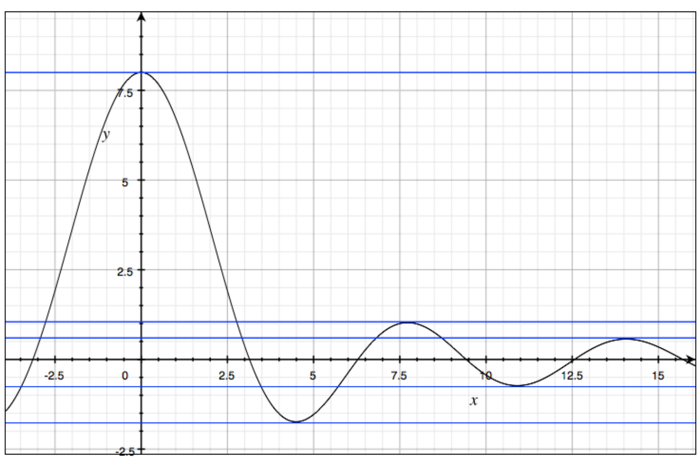
Figura 6.37 REPRESENTACIÓN DE LA RECTA *y*=8 Y $f(x)$



Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

La recta $y = 8$ es tangente en T porque en intervalos cercanos a este punto, la gráfica de $f(x)$ está por debajo de esta recta. Si se aplica el mismo procedimiento en otros puntos de interés de $f(x)$, se obtienen otras 5 rectas tangentes tal como muestra la figura 6.38:

Figura 6.38 REPRESENTACIÓN DE RECTAS HORIZONTALES EN $f(x)$



Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

Estas son:

$y = 8$

$y = 1.06$

$y = 0.6$

$y = -0.76$

$y = -1.78$

La decisión se ha tomado observando las representaciones gráficas de la trayectoria y las rectas. Otra técnica posible utilizaría resolución algebraica de sistema de ecuaciones para observar si la recta horizontal es tangente a la trayectoria o no. Se observa que la pendiente de todas las rectas es 0, por lo tanto, para saber el punto de tangencia en la gráfica, basta con sustituir el valor de las rectas en la función de la trayectoria como se realizó en $\boldsymbol{Q_{01}}$. Mediante esta técnica gráfica de aproximaciones se observa que los puntos de tangencia de las rectas y $f(x)$ corresponden a extremos locales, por lo que se deduce que en puntos de esas características la derivada es 0.

6.1.1.7. Momentos de trayectoria vertical del vagón

$\boldsymbol{Q_{06}}$ ¿Podrá en algún momento el vagón inclinarse 90° con respecto al eje *x*?

Técnica:

$\boldsymbol{\tau_{06}^{1}}$ Tomando como ejemplo los diagramas realizados en la actividad anterior, se podrían diseñar varios escenarios en los cuales pueda observarse la inclinación del vagón. Una vez estudiada las diferentes posiciones que este pueda tener, se verifica si con los diagramas se podría esquematizar una flecha vertical que cumpla con la hipótesis.

6.1.1.8. Momentos de trayectoria vertical específica del vagón

$\boldsymbol{Q_{07}}$ ¿Se puede calcular de la recta tangente vertical en una trayectoria?

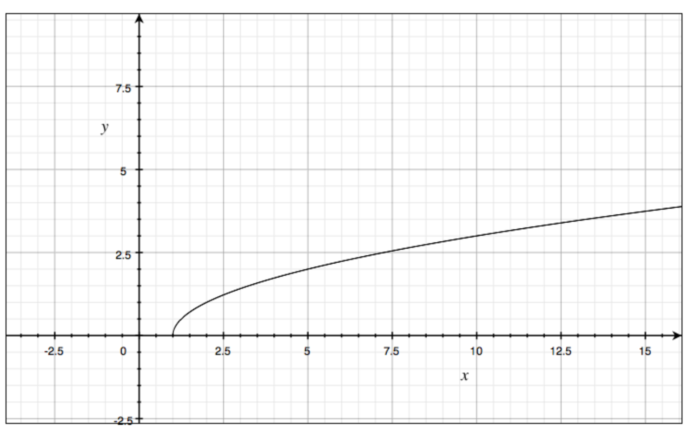
Técnica:

$\boldsymbol{\tau_{07}^{1}}$ Se considerará la pista $f(x) = \sqrt{x-1}$. La elección de esta función es debido a que podrá generar un desplazamiento vertical por parte de los vagones en su extremo y, a diferencia de $f(x) = \sqrt{x}$ (pista de Q_0), dicho desplazamiento vertical no coincide con el eje de ordenadas.

Para $f(x)$, se podrán observar rectas verticales. Además, es indispensable estar al tanto que las rectas verticales no son funciones, y por consiguiente, sus pendientes tienden a $\pm\infty$. Estas serán escritas de la forma $x = a$.

Ha de tenerse en cuenta que la posición vertical es imposible salvo adherencia a la pista. Puede considerarse como la posición a la que se aproxima el vagón. La figura 6.39 representa una pista donde esto puede suceder.

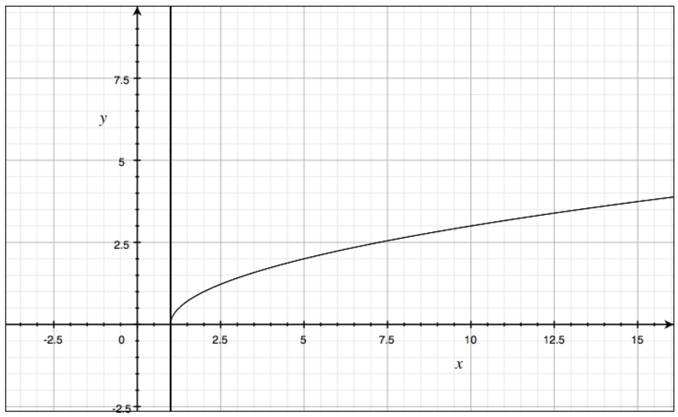
Figura 6.39 REPRESENTACIÓN DE LA CURVA $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x-1}}$



Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

La recta $x = 1$ se traza aplicando el mismo proceso de la cuestión anterior, aproximándola tangencialmente y variando su posición[13] (figura 6.40).

Figura 6.40 REPRESENTACIÓN DE LA RECTA *x*=1 Y $f(x) = \sqrt{x-1}$



Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

Hasta aquí se han tratado tangencias en puntos concretos, aproximaciones sucesivas a la derivada, extremos locales y tangencias verticales.

6.1.2. Cálculo de rectas tangentes sobre figuras geométricas

Se considera la siguiente cuestión en la que no se basará para resolver la tangente en un punto concreto, sino rectas tangentes a una curva desconociendo el punto de tangencia a priori.

$\boldsymbol{Q_1}$: Análisis de movimiento de una recta sobre superficies circulares

Una persona suele trabajar en un parque entreteniendo a turistas haciendo equilibrio sobre una tabla que está colocada sobre un cilindro que gira sobre sí

[13] Es evidente que las pendientes de las rectas $x = a \Rightarrow \infty$. Por lo tanto, para cambiar sus posiciones basta solo con variar su coordenada x

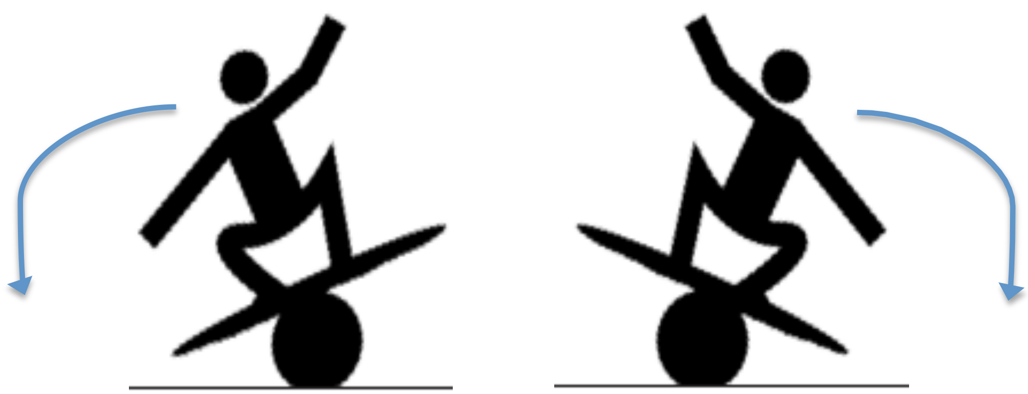
mismo pero no se desplaza. Si se observa de frente, se puede representar como se muestra en la figura 6.41.

Figura 6.41 REPRESENTACIÓN DE PERSONA SOBRE TABLA Y CILINDRO ESTABLE

Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

Esta persona permanece durante un tiempo moviéndose con la tabla para no caerse. La figura 6.42 representa cómo se balancea en diferentes oportunidades

Figura 6.42 REPRESENTACIÓN DE PERSONA SOBRE TABLA Y CILINDRO BALANCEÁNDOSE



Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

6.1.2.1. Posiciones de la tabla sobre cilindro

La persona va moviendo la tabla hacia ambos lados en diferentes ocasiones y sin que se desprenda. Observando este comportamiento, se plantea $\boldsymbol{Q_{10}}$ ¿qué posiciones va teniendo la tabla en contacto con la superficie del cilindro?

Técnica:

Como lo indica el problema, existe una persona haciendo equilibrio sobre una tabla que se encuentra sobre un cilindro. Es por ello que es indispensable observar detalladamente el movimiento que ejerce la tabla cuando esta se balancea. Para ello se pueden emplear las siguientes *técnicas*:

$\boldsymbol{\tau_{10}^{1}}$ Imaginar de forma intuitiva el recorrido de la tabla sobre el cilindro y describir las diferentes posiciones que podría tomar.

$\boldsymbol{\tau_{10}^{2}}$ Colocar sobre un tubo cilíndrico una regla o cualquier otro material semejante en equilibrio. Luego ejercer un peso leve en un extremo u otro en diferentes momentos para así generar una secuencia parecida a como explica el problema. A partir de estas observaciones realizar una representación de lo ocurrido y sacar conclusiones al respecto.

6.1.2.2. Posiciones específicas de la tabla sobre cilindro

$\boldsymbol{Q_{11}}$ ¿Se podría ser más concreto haciendo un análisis según la ecuación de la superficie del cilindro?

La *técnica* $\boldsymbol{\tau_{11}^{1}}$ describirá las posiciones en las que va situándose la tabla al hacer contacto con el cilindro, donde se trazará el mayor número de rectas tangentes a la superficie de su parte superior. Para encontrar estas rectas se seguirán los siguientes pasos, que buscan aproximar la pendiente de rectas tangentes.

1 – Se modelizará el sistema trasladando ambos objetos a una representación plana con un sistema de coordenadas, sustituyendo la tabla por una recta y la superficie del cilindro por una semicircunferencia.

2 – Escoger diferentes puntos aleatoriamente pertenecientes a la semicircunferencia y trazar rectas secantes que pasen por ellos.

3 – Aproximar tangencialmente las rectas secantes obtenidas a un punto de la semicircunferencia variando sus pendientes hasta que sea necesario.

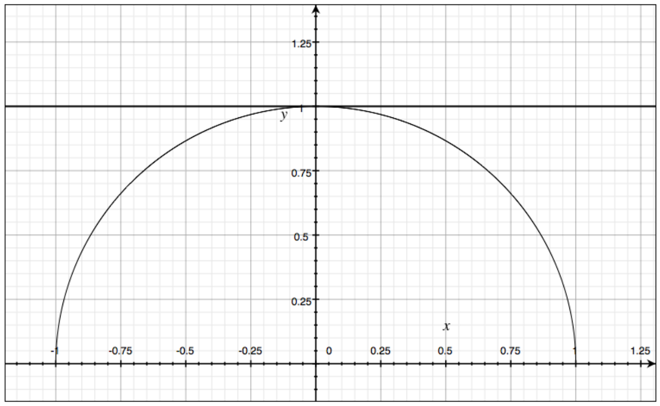
4 – Comprobar algebraicamente que la recta es tangente.

5 – Al haber logrado aproximar tangencialmente las rectas secantes a la semicircunferencia, se agruparán tantas rectas tangentes como sean necesarias hasta lograr describir el movimiento de la tabla en forma de secuencia.

6 – Observando las pendientes de todas las rectas se podría abstraer una fórmula general de las mismas.

A continuación las funciones $f(x) = +\sqrt{1-x^2}$ y $g(x) = ax + b$ sustituirán y representarán ambos objetos de forma precisa representadas en la figura 6.43. $f(x)$ será el cilindro y $g(x)$ la tabla.

Figura 6.43 REPRESENTACIÓN DE TABLA EN EQUILIBRIO SOBRE CILINDRO ESTABLE



Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

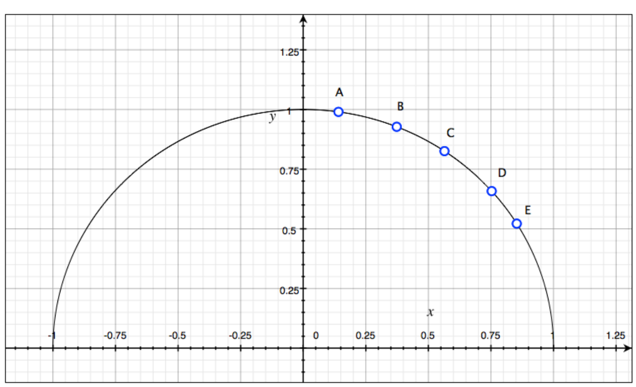
Como indica el segundo paso, se escogerán puntos aleatorios en la semicircunferencia. Se trabajará primero en el intervalo $[0, 1]$ pudiendo luego realizar el mismo procedimiento en $[-1, 0)$.

La siguiente tabla indica puntos aleatorios en el primer cuadrante de $f(x)$:

	A	B	C	D	E
x	0.1408	0.3735	0.5643	0.7135	0.853
y	0.99	0.9276	0.8256	0.6995	0.5218

Los puntos A, B, C , D y E son representados como lo describe la figura 6.44.

Figura 6.44 REPRESENTACIÓN DE LOS PUNTOS A, B, C, D Y E EN LA CURVA

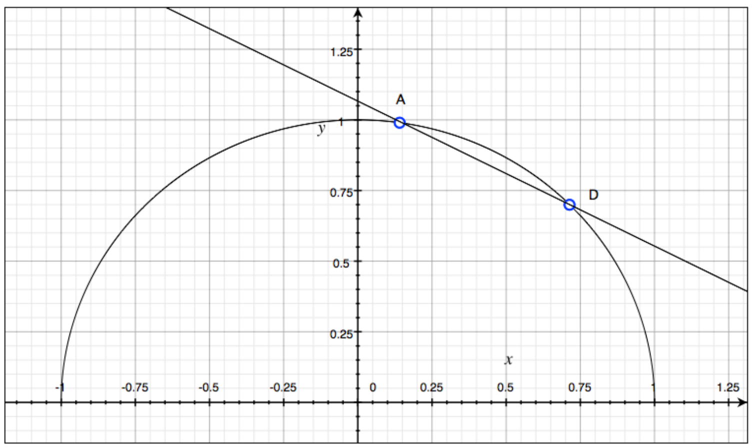


Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

Uniendo dos puntos cualesquiera de los seleccionados de la semicircunferencia en diferentes oportunidades se trazarán rectas secantes a $f(x)$ utilizando la ecuación punto pendiente. Se trabajará con una sola recta inicialmente para luego realizar el mismo proceso con las otras rectas.

Al unir los puntos A y D en $f(x)$ se obtiene la recta $AD: y = -0.55x + 1.06$, presentados en la figura 6.45.

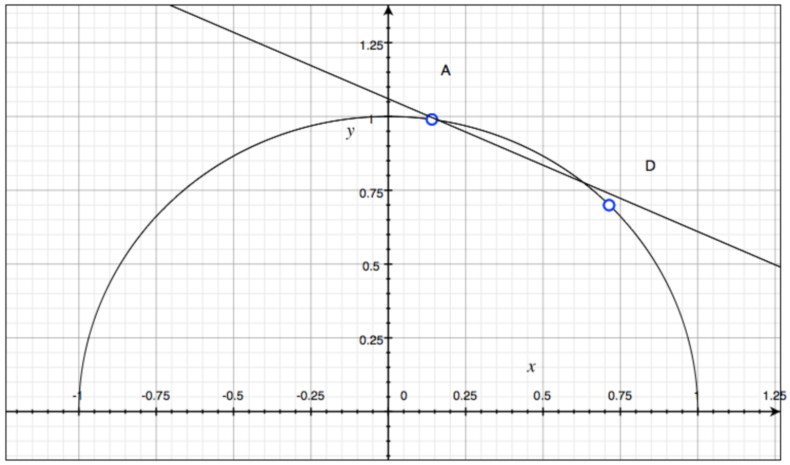
Figura 6.45 REPRESENTACIÓN DE LA CURVA INTERSECADA CON LA RECTA AD



Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

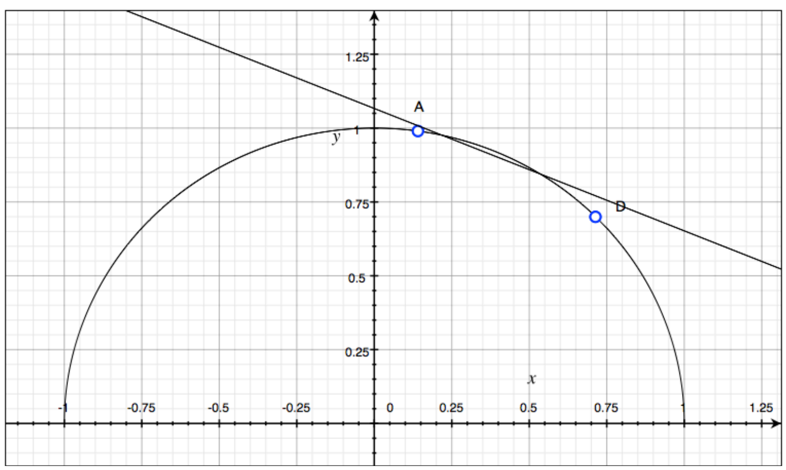
A continuación, se le aplicará un $\Delta m = 0.1$ a la recta AD, es decir $m = -0.55 + 0.1 = -0.45$, y posteriormente $\Delta m = 0.05$ para así ver cómo se aproxima tangencialmente a $f(x)$ manteniendo el corte con el eje y constante. Más aún, los puntos A y D se quedarán expuestos en $f(x)$ para tener referencia a como AD estaba situada antes (figura 6.46 y 6.47).

Figura 6.46 REPRESENTACIÓN DE $f(x)$ Y RECTA CON $\Delta m = 0.1$: $y = -0.45x + 1.06$



Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

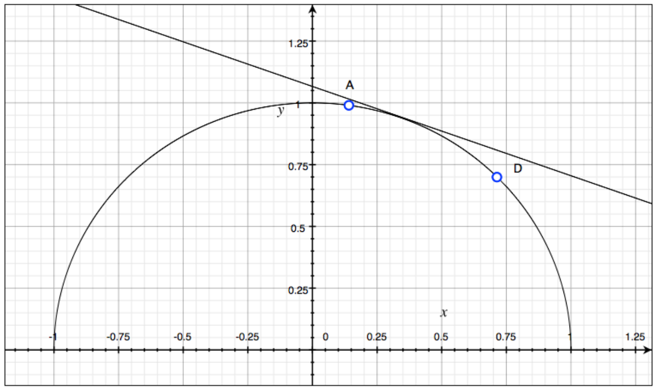
Figura 6.47 REPRESENTACIÓN DE AD CON $\Delta m = 0.15$: $y = -0.4x + 1.06$



Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

Al observar el cambio en la recta con $\Delta m = 0.15$ se puede notar que es una aproximación bastante válida a $f(x)$ pero podría aproximarse mejor. Para esto se aplicará un $\Delta m = 0.2$ para inclinarla un poco más y lograr una mejor aproximación (figura 6.48).

Figura 6.48 REPRESENTACIÓN DE AD con $\Delta m = 0.2$: $y = -0.35x + 1.06$



Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

La recta parece ser tangente en un punto de la semicircunferencia. Sin embargo, para lograr una mejor aproximación, se aplica este procedimiento tantas veces sea necesario y se obtiene: $y = -0.3741x + 1.06$.

Para comprobar dicha tangencia, basta con intersecar y con $f(x)$ y obtener el punto de tangencia. Para este proceso se aplican los siguientes pasos:

Igualando $\Rightarrow \sqrt{1-x^2} = -0.3741x + 1.06$

Elevando al cuadrado $\Rightarrow 1 - x^2 = (-0.3741x + 1.06)^2$

Expandiendo $\Rightarrow 1 - x^2 = (-0.3741x)^2 - 2x(0.3741)(1.06) + (1.06)^2$

Operando $\Rightarrow 1 - x^2 = 0.1399\mathrm{x}^2 - 0.793x + 1.1236$

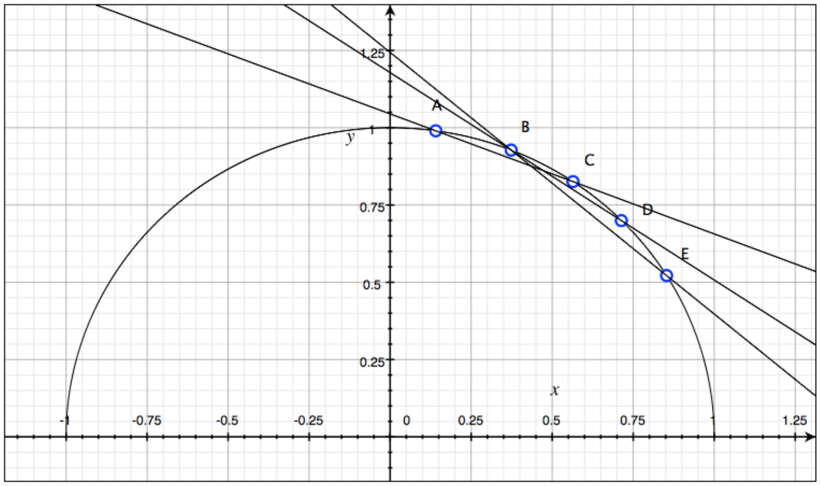
Agrupando $\Rightarrow\ 1.399x^2 - 1.785x + 1.1236 = 0$

Aplicando $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ se obtiene: $x_1 =\ x_2 = 0.3504$

Finalmente se obtiene T $\Rightarrow T(0.3504, 0.9366)$

Ahora bien, conectando el resto de los puntos aleatoriamente se generan la siguientes rectas secantes a $f(x)$, representadas en la figura 6.49.

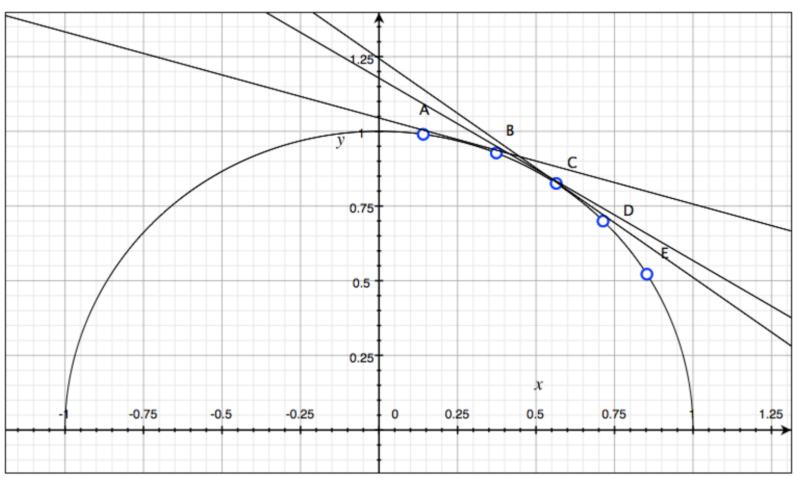
Figura 6.49 RECTAS AC, BD Y BE SECANTES A $f(x)$



Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

Aplicando el mismo procedimiento anterior se podrá observar como estas rectas se aproximan tangencialmente a $f(x)$ en la siguiente gráfica, obteniendo como resultado la figura 6.50.

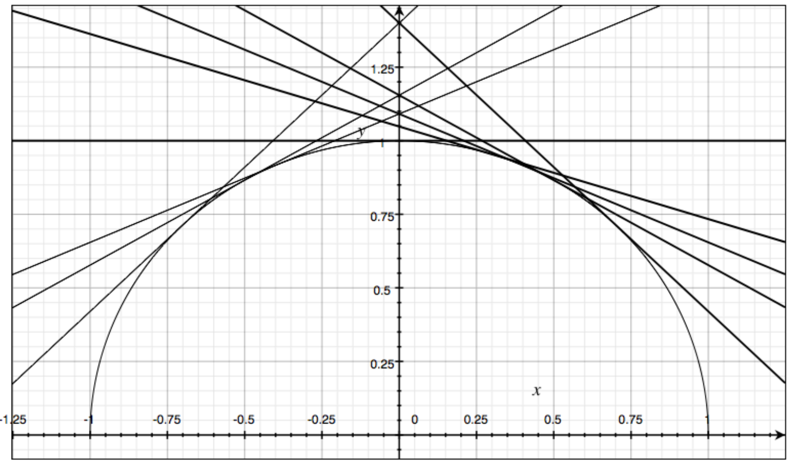
Figura 6.50 REPRESENTACIÓN DE APROXIMACIÓN DE RECTAS TANGENTES A $f(x)$



Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

Combinando esta técnica en el intervalo $[-1, 1]$ se obtienen las siguientes aproximaciones de rectas tangentes a $f(x)$ (figura 6.51).

Figura 6.51 REPRESENTACIÓN DE APROXIMACIONES DE RECTAS TANGENTES A $f(x)$



Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

Las aproximaciones de rectas tangentes en $f(x)$ son las posiciones que va tomando la tabla en la superficie del cilindro a medida que la persona la balancea de un lado a otro. Sus ecuaciones podrán ser escritas a partir del punto en el que sean ser tangentes utilizando la ecuación punto pendiente.

Observando todas las rectas tangentes se aprecia el comportamiento en cuanto a crecimiento y decrecimiento y su relación con la pendiente de dichas rectas, llegando a la conclusión de que la relación de todas las pendientes es función derivada de $f(x)$ recogen dicha información.

La tecnología explicativa es que a medida que se aproximan dos puntos de una función derivable, la recta que los une tiene pendiente más próxima a la derivada en un punto intermedio de ambos puntos.

6.1.3. Cálculo de aceleración en recorridos

A continuación se estudiará la velocidad cuando esta varía con respecto al tiempo debido a sus incrementos de aceleración.

$\boldsymbol{Q_2}$ Variación de velocidad con respecto al tiempo

Karina hace ejercicio todas las mañanas. Comienza inmóvil en $t = 0\,min$. Poco a poco aumenta su velocidad en un intervalo de 3 minutos hasta llegar a 9 km/h. Justo al alcanzar dicha velocidad, desacelera poco a poco durante 3 minutos hasta llegar nuevamente a detenerse.

6.1.3.1. Variación de tasas de variación de velocidad por minuto en diferentes intervalos

Se plantea la siguiente cuestión:

$\boldsymbol{Q_{20}}$ ¿Se puede calcular la tasa de variación de velocidad por minuto en diferentes intervalos?

A partir de esta cuestión, se pueden plantear las siguientes preguntas:

$\boldsymbol{Q_{20}^1}$ ¿Cuál es la variación de velocidad por minuto que Karina ejerce entre los primeros 3 minutos?

$\boldsymbol{Q_{20}^2}$ ¿Cuál es la variación de velocidad por minuto que Karina ejerce entre el minuto 3 y el minuto 6?

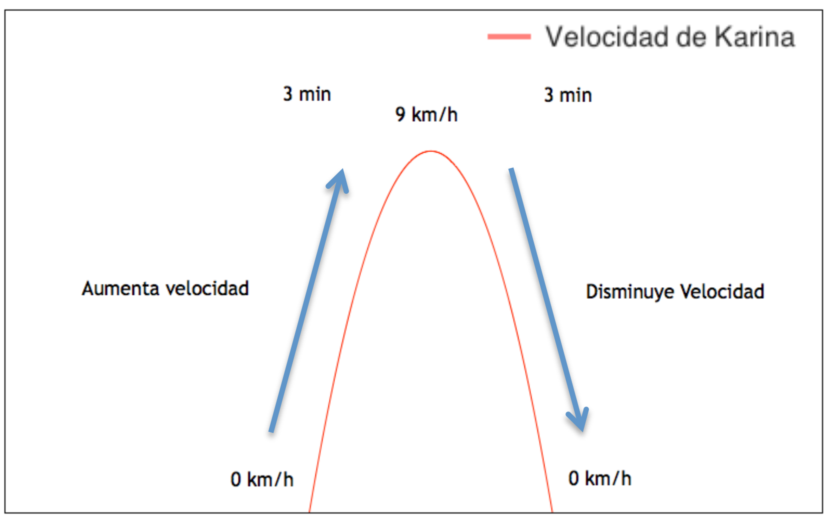
$\boldsymbol{Q_{20}^3}$ ¿Cuál es la variación de velocidad por minuto que Karina ejerce entre el minuto 0 y el minuto 6?

Para responder a las tres cuestiones se empleará la *técnica* $\boldsymbol{\tau_{20}^{1}}$ para cada pregunta:

Para la realización de esta actividad es necesario primero calcular el tiempo en el cual Karina hace ejercicio, ya que la pregunta esta en función del tiempo total. Esto sería 3 minutos de aceleración, 3 minutos de desaceleración y 6 minutos en total.

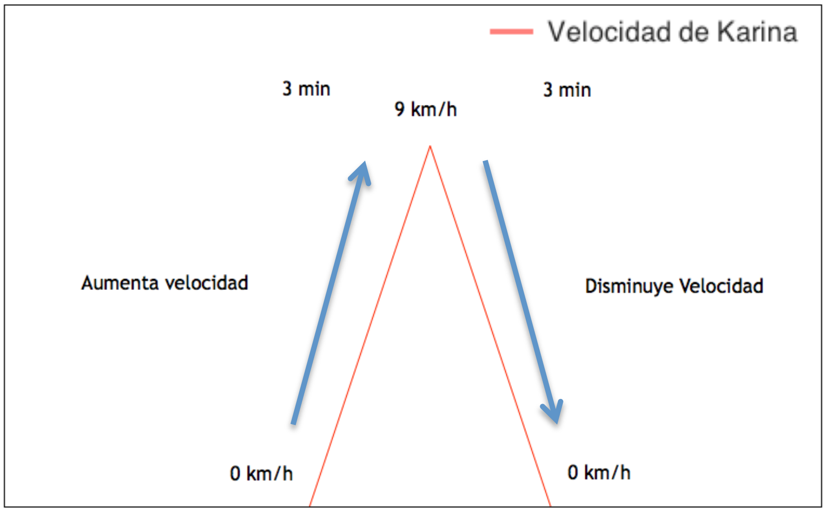
A continuación se crean posibles esquemas de transición del paseo que ha realizado Karina para visualizarlo gráficamente. Una vez expuestos, estos ayudarán a responder las preguntas de la tarea. Sus representaciones se encuentran en las figuras 6.52, 6.53, 6.54 y 6.55.

Figura 6.52 REPRESENTACIÓN DE ESQUEMA DE TRANSICIÓN 1 DE LA VELOCIDAD



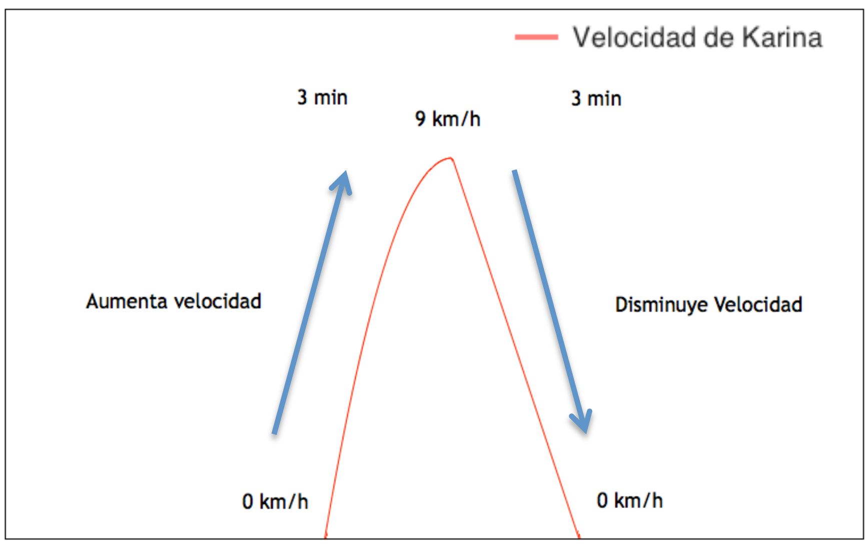
Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

Figura 6.53 REPRESENTACIÓN DE ESQUEMA DE TRANSICIÓN 2 DE LA VELOCIDAD



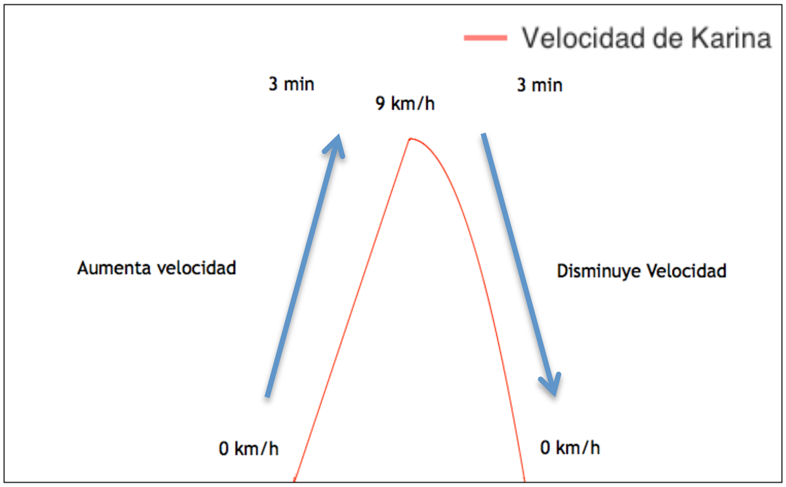
Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

Figura 6.54 REPRESENTACIÓN DE ESQUEMA DE TRANSICIÓN 3 DE LA VELOCIDAD



Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

Figura 6.55 REPRESENTACIÓN DE ESQUEMA DE TRANSICIÓN 4 DE LA VELOCIDAD

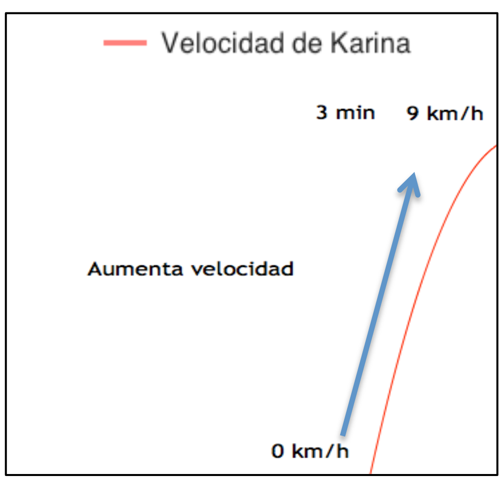


Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

Se procede a responder la cuestión Q_{20}^{1} :¿Cuál es la variación de velocidad que Karina ejerce entre los primeros 3 minutos?

Utilizando la mitad del esquema de transición 1 (figura 6.56). Se puede observar que Karina empezó con una velocidad de 0 km/h y finalizó en el minuto 3 alcanzando 9 km/h. Esto es:

Figura 6.56 REPRESENTACIÓN DE MITAD ASCENDENTE DE ESQUEMA 1 DE TRANSICIÓN



Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

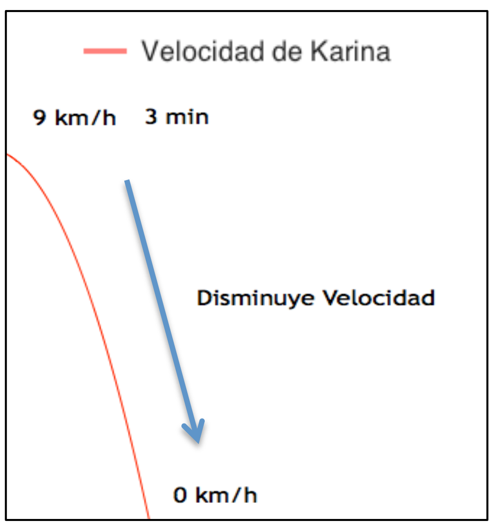
Se puede observar que el intervalo en el que Karina hace ejercicio comprendido entre los 0 km/h y 9 km/h en un tiempo de tres minutos tiene una tasa de variación media de: $\frac{9\frac{km}{h}-0\frac{km}{h}}{3min} = 3\,\frac{km/h}{min}$, calculando $\frac{velocidad(3)-velocidad(0)}{3-0}$.

Nótese que este resultado es independiente del esquema de transición.

Se aborda $\boldsymbol{Q_{20}^2}$:¿Cuál es la tasa de variación media de velocidad que Karina ejerce entre el minuto 3 y el minuto 6?

Esta pregunta es parecida a la anterior, ya que Karina hace ejercicio durante 3 minutos. En este caso desacelera hasta llegar a tener una velocidad de 0 km/h. Aplicando la misma *técnica* $\boldsymbol{\tau_{20}^1}$ de la primera pregunta pero partiendo del minuto 3 se obtiene el esquema de la figura 6.57.

Figura 6.57 REPRESENTACIÓN DE MITAD DESCENDENTE DE ESQUEMA 1 DE TRANSICIÓN



Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

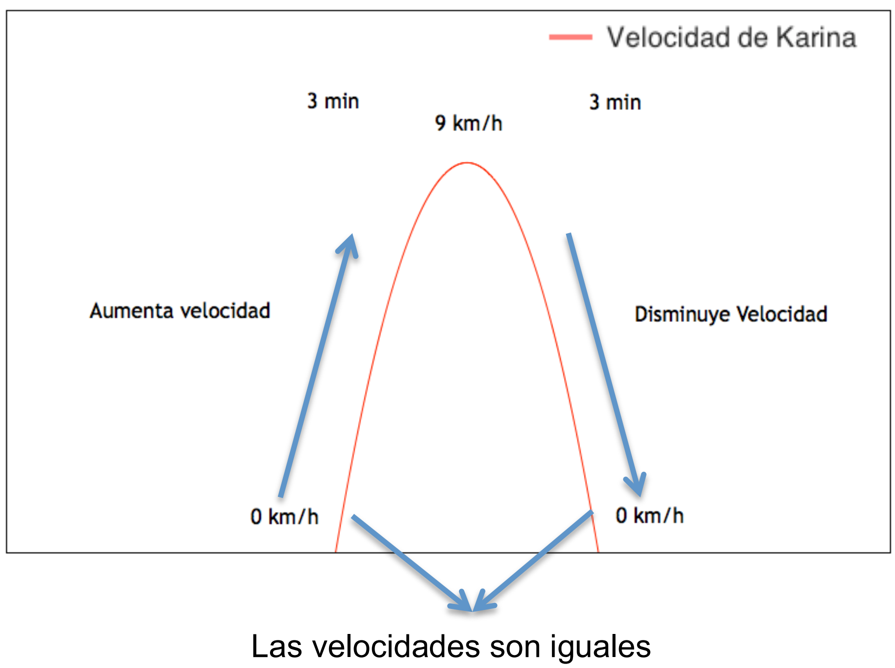
Se puede diferenciar con respecto al ejercicio anterior que Karina está disminuyendo su velocidad de 9 km/h a 0 km/h. Por lo tanto, la tasa de variación media es entre los minutos 3 y 6 es: $\frac{0\frac{km}{h}-9\frac{km}{h}}{3min} = -3\,\frac{km/h}{min}$, $\frac{velocidad(6)-velocidad(3)}{6-3}$.

De nuevo se observa la independencia de este resultado con respecto al esquema de transición.

Finalmente se responde $\boldsymbol{Q_{20}^{3}}$: ¿Cuál es la tasa de variación media que Karina ejerce entre el minuto 0 y minuto 6?

Aplicando $\boldsymbol{\tau_{20}^{1}}$, primero se observa que Karina comienza a hacer ejercicios hasta que termina y se puede notar que en el momento inicial y en el final su velocidad es 0 (figura 6.58).

Figura 6.58 REPRESENTACIÓN DE VELOCIDADES DE KARINA EN EL MINUTO 0 Y 6



Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

Por lo tanto, sus velocidades finalmente coinciden, significando esto que la tasa de variación media es: $\frac{0\frac{km}{h}-0\frac{km}{h}}{6\,min} = 0\,\frac{km/h}{min}$, $\frac{velocidad(6)-velocidad(0)}{6-0}$.

De nuevo, nótese que se obtiene el mismo resultado para todas las preguntas aplicando el mismo proceso con los esquemas restantes, es decir, no se ha obtenido información relevante sobre los cambios más puntuales de la velocidad de Karina a lo largo del tiempo. Se plantea entonces la siguiente cuestión:

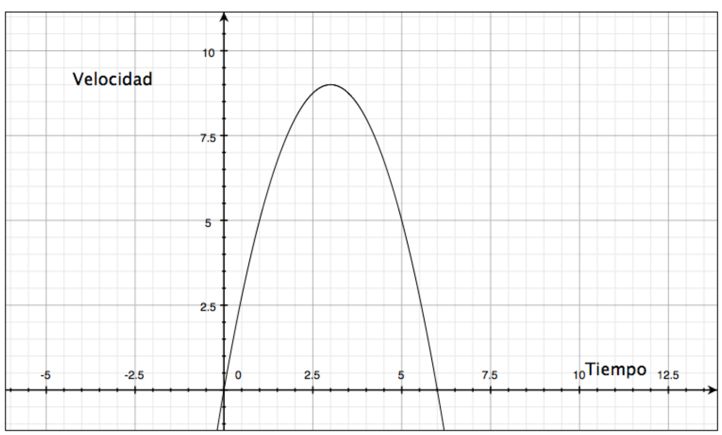
6.1.3.2. Interpretación gráfica de la tasa de variación media

$\boldsymbol{Q_{21}}$: ¿Qué representa gráficamente la tasa de variación media?

Técnica:

τ_{21} Se utiliza la definición de tasa de variación media y se traza una recta entre los puntos de interés para calcular su pendiente. Para esto se cambiarán los esquemas anteriores y se sustituirán por gráficas con sus respetivas ecuaciones, como se muestra en la figura 6.59.

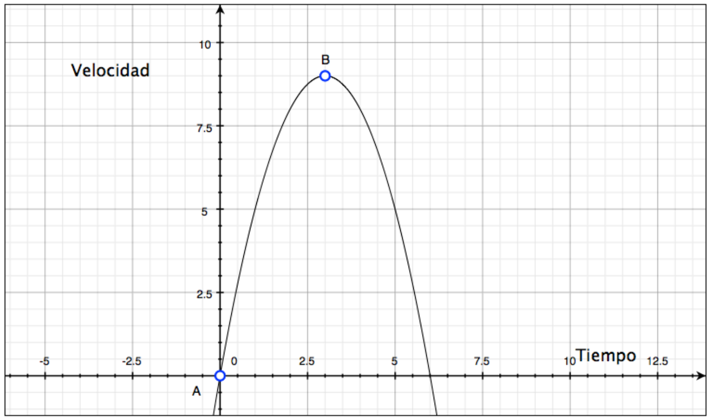
Figura 6.59 REPRESENTACIÓN DE ESQUEMA DE LA FUNCIÓN: $\boldsymbol{f(x) = -x^2 + 6x}$



Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

Ahora bien, se prosigue seleccionando los puntos de interés. Estos son el punto en el que Karina empieza a hacer ejercicio y en el que empieza a frenar (figura 6.60).

Figura 6.60 REPRESENTACIÓN DE PUNTOS A(0,0) Y B(3,9) EN LA FUNCIÓN



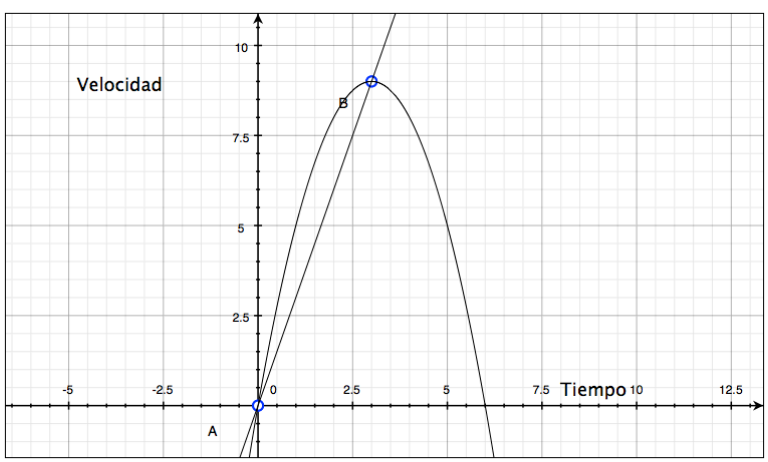
Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

Utilizando la función de la tasa de variación media (calculada en las cuestiones Q_{20}^{i}) se tiene que:

$$T.V.M = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9-0}{3-0} = \frac{9}{3} = 3$$

Por otro lado, al unir $A \text{ con } B$ se obtiene la recta $AB: y = 3x$. Se obtiene la representación de la figura 6.61.

Figura 6.61 REPRESENTACIÓN DE LA RECTA AB EN CURVA

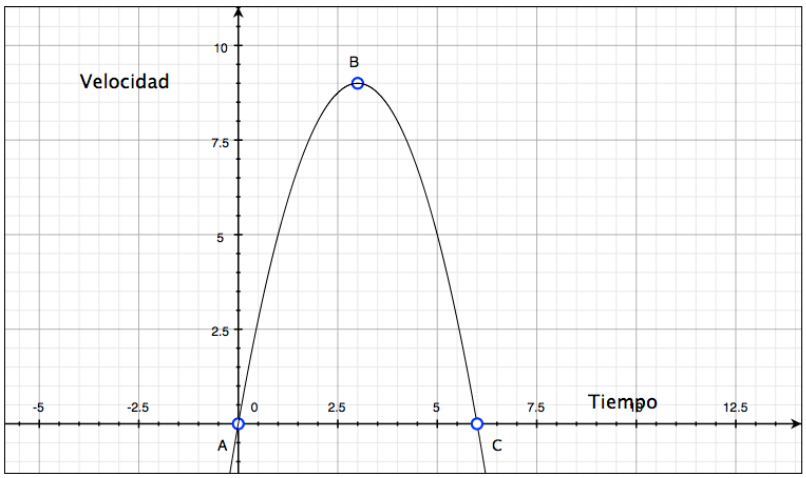


Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

La pendiente de esta recta coincide con la $T.V.M$ previamente calculada.

Incorporando un nuevo punto $C(6,0)$ se querrá calcular la tasa de variación media entre BC y la tasa de variación media entre AC. Estos puntos pueden verse con más facilidad en la gráfica de la figura 6.62.

Figura 6.62 REPRESENTACIÓN DE LOS PUNTOS A, B Y C EN LA CURVA



Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

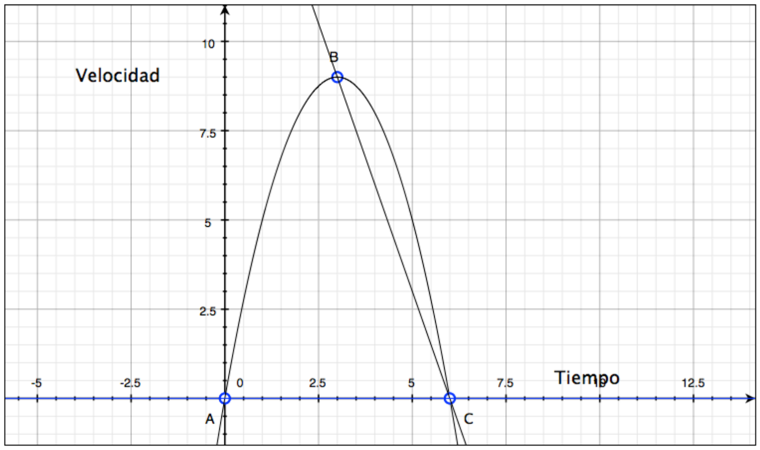
Finalmente, aplicando el mismo procedimiento anterior para calcular la tasa de variación media ente BC y AC se obtiene que:

$T.V.M\ (BC) = -3$

$T.V.M\ (AC) = 0$

La representación de rectas BC y AC $(azul)$ se encuentra en la figura 6.63.

Figura 6.63 REPRESENTACIÓN DE LA RECTA BC EN LA CURVA



Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

La rectas $BC: y = -3x + 18$ e $y = 0$ tienen pendientes de -3 y 0 respectivamente, por lo tanto coinciden con las tasas de variación media.

En conclusión, la tasa de variación media entre dos puntos coincide con la pendiente de la recta que une esos dos puntos.

6.1.3.3. Aceleración en intervalos específicos

$\boldsymbol{Q_{22}}$ ¿Cómo obtener más información sobre el cambio de velocidad[14] de Karina en momentos concretos de tiempo?

Técnica:

$\boldsymbol{\tau_{22}^{1}}$ Para conocer el cambio de velocidad de Karina en un momento determinado se puede aplicar la *técnica* de acotación de puntos utilizada previamente en Q_0 para obtener una recta tangente. La pendiente de esta recta será la tasa de variación instantánea, o en este caso, la aceleración instantánea.

[14]Nótese que la derivada de la velocidad es la aceleración. Es decir: $\frac{dv}{dt} = a$.

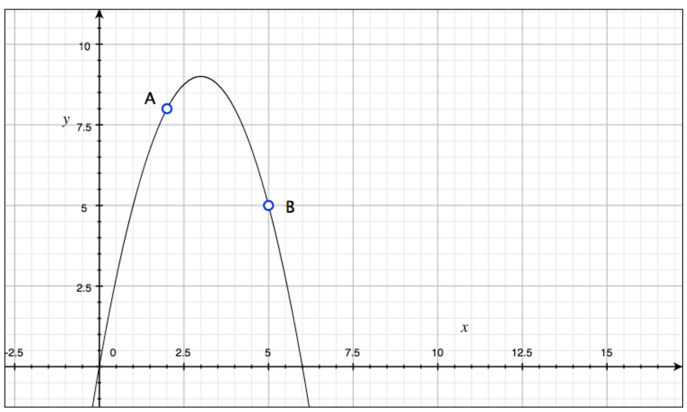
Por ejemplo:

Haciendo nuevamente uso de $f(x) = -x^2 + 6x$ para describir la velocidad de Karina, se quiere saber su aceleración a los 2 y 5 segundos. Para esto se obtienen los puntos A y B siguientes:

	A	B
x	2	5
y	8	5

La representación de puntos y gráfica se muestra en la figura 6.64.

Figura 6.64 REPRESENTACIÓN DE PUNTOS A Y B EN $f(x) = -x^2 + 6x$



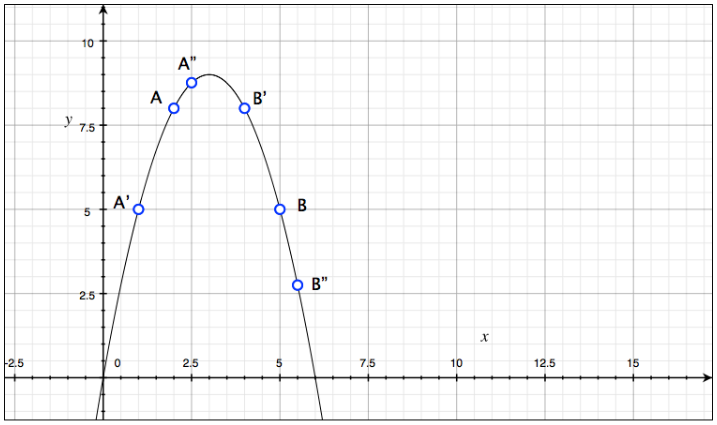
Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

Se eligen dos puntos asignados a A y B que pertenezcan a la función de manera que se encuentren entre ellos se obtiene:

	A'	A''	B'	B''
x	1	2.5	4	5.5
y	5	8.75	8	2.75

La representación de los mismos en la curva se encuentran en la figura 6.65.

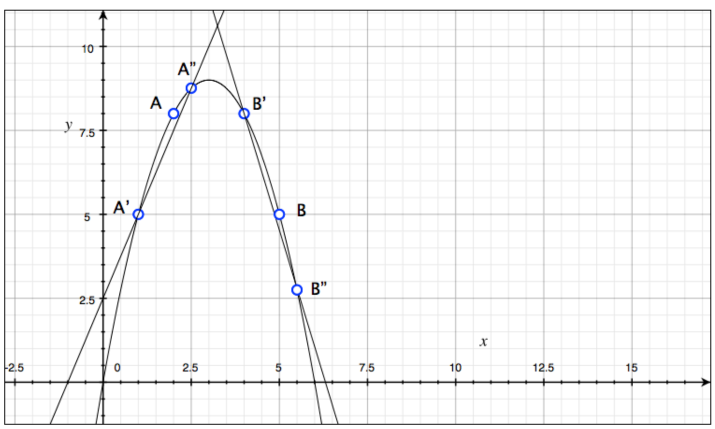
Figura 6.65 REPRESENTACIÓN DE LOS PUNTOS A, B, A', B', A'' Y B'' EN LA CURVA



Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

Uniendo A' con A'' y B con B'' se obtienen las gráficas de la figura 6.66.

Figura 6.66 RECTAS A'A'': $\boldsymbol{y = 2.5x + 2.5}$ **Y B'B'':** $\boldsymbol{y = -3.5 + 22 \cap f(x) = -x^2 + 6x}$

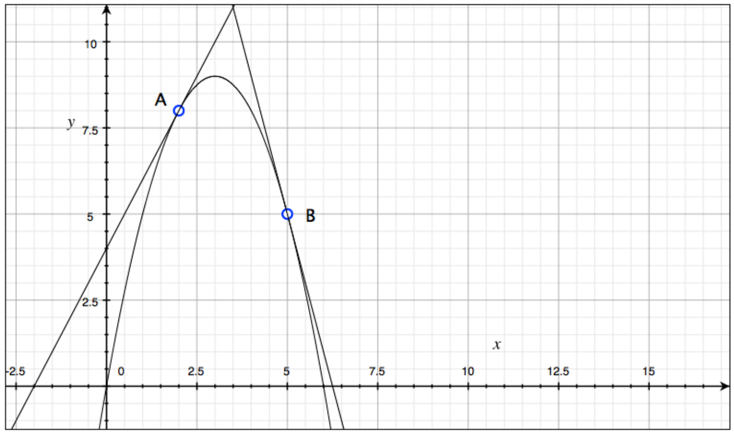


Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

Nótese que A'A'' y B'B'' no pasan por A ni B respectivamente. Por lo tanto, al aplicar el proceso de acotamiento de puntos tantas veces sea necesario, se podrá lograr que estas rectas sean tangentes en A y B.

Las rectas tangentes en A y B respectivamente son: $y = 2x + 4$ y $y = -4x + 25$, representadas en la figura 6.67.

Figura 6.67 REPRESENTACIÓN DE RECTAS TANGENTES A LA CURVA EN LOS PUNTOS A Y B

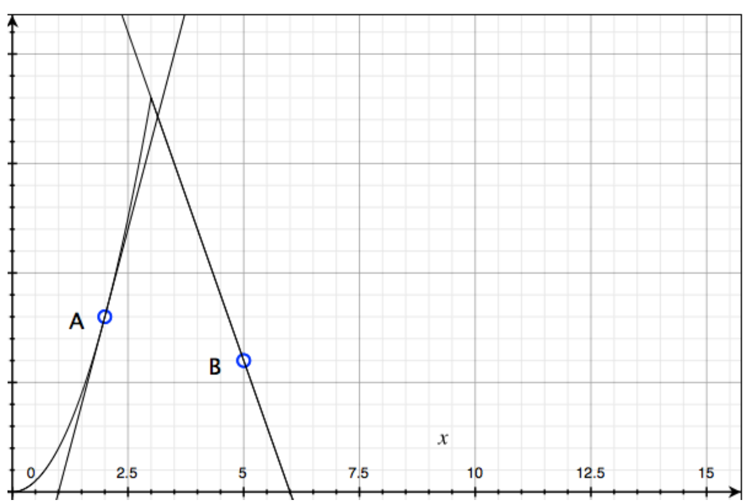


Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

Finalmente, al observar las pendientes de estas rectas se puede notar que la tasa de variación o aceleración instantánea a los 2 y 5 segundos son de 2 y -4 respectivamente. Es decir, la tasa de variación instantánea es la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto.

Por otro lado, nótese que en las figuras 6.68 y 6.69 hay diferencia según el esquema de transición.

Figura 6.68 ESQUEMA DE TRANSICIÓN 1A



Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

Figura 6.69 ESQUEMA DE TRANSICIÓN 1B

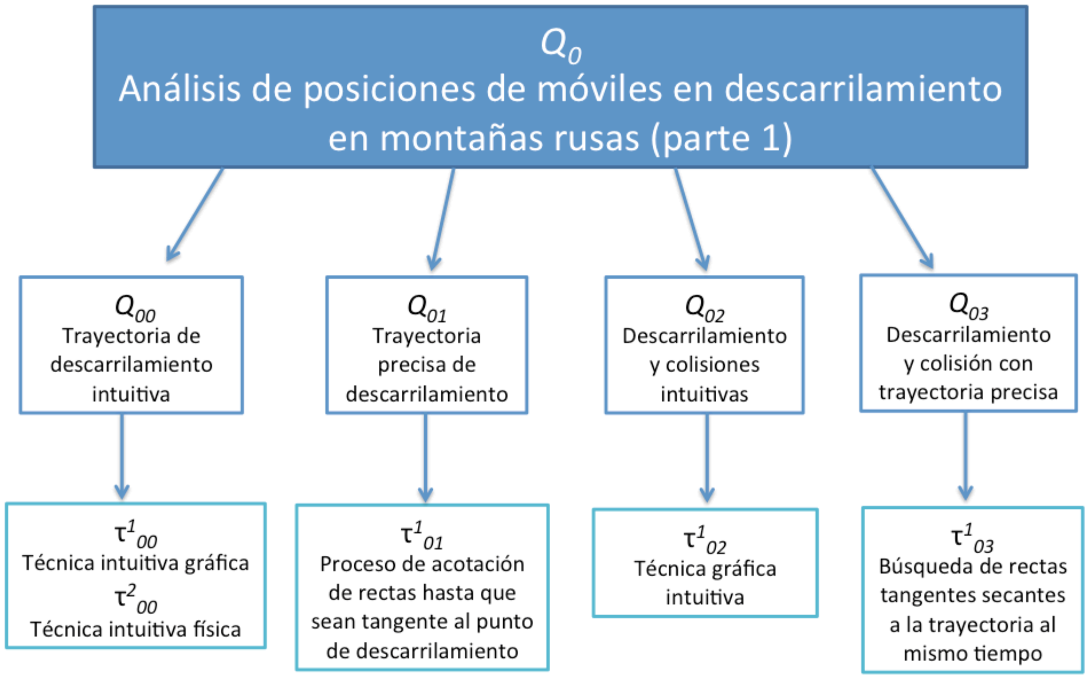
Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

Las rectas representadas en estas figuras demuestran claramente que son diferentes a las de la figura 6.66. Más aún, estas rectas son tangentes en los puntos A y B en el mismo tiempo que se calculó anteriormente, ese decir, a los 2 y 5 segundos. Por tanto, se puede notar que tienen una inclinación diferente, lo que implica que sus pendientes o aceleraciones han variado en el mismo intervalo de tiempo pero con recorridos diferentes.

Aquí finaliza el MER. Este ha sido planteado con *técnicas* intuitivas y de aproximación para una primera aproximación a la derivada. Primero se ha abordado el significado geométrico, para luego tratar el físico y relacionar ambos en la ultima cuestión.

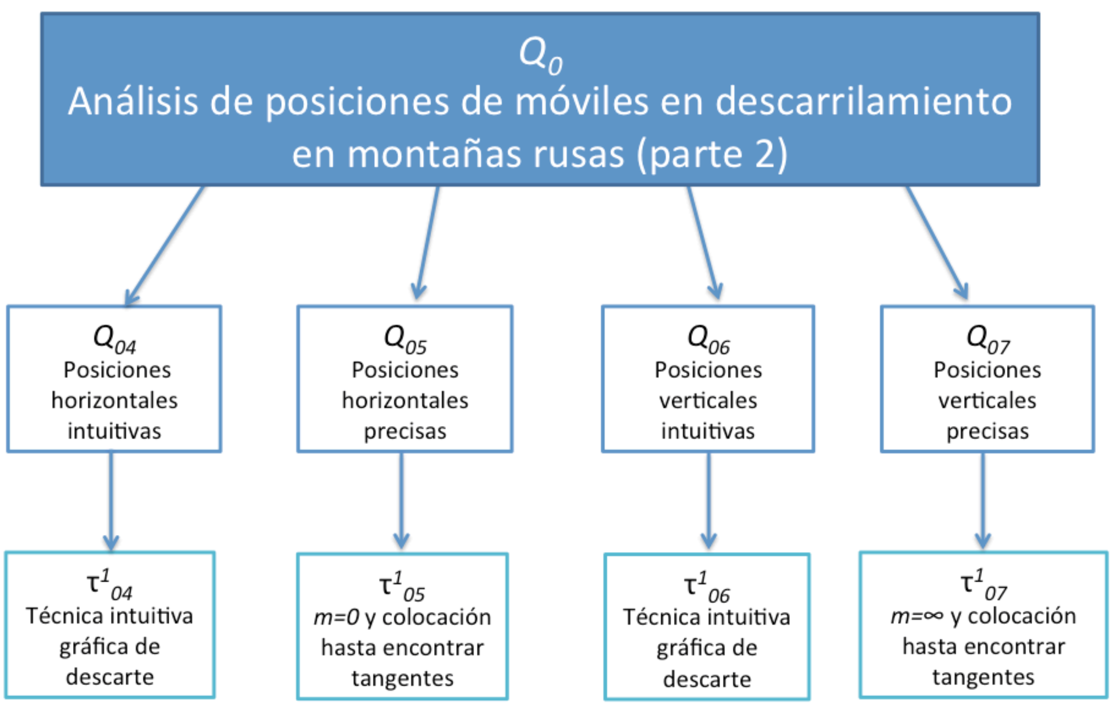
Para facilitar su disponibilidad posterior, véanse los esquemas en las figuras 6.70, 6.71, 6.72 y 6.73:

Figura 6.70 REPRESENTACIÓN DE Q_0 (PARTE 1)



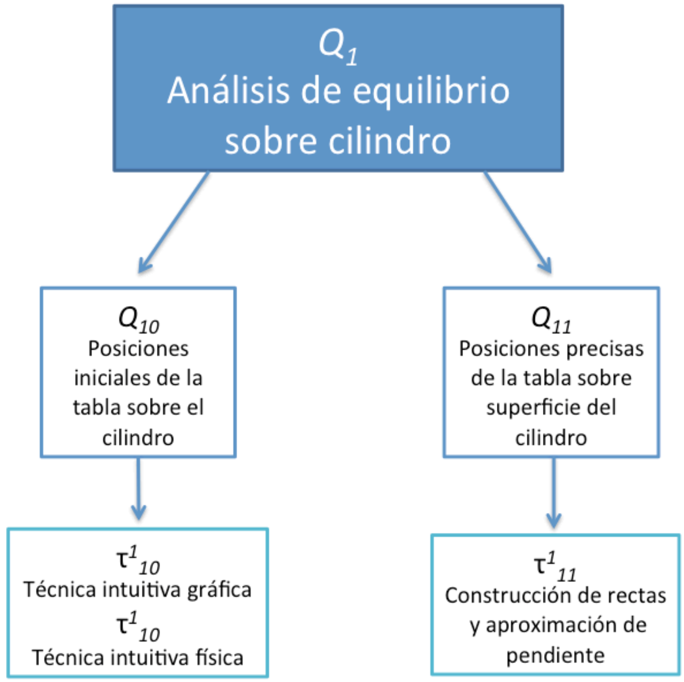
FUENTE: ELABORACIÓN PROPIA

Figura 6.71 REPRESENTACIÓN DE Q_0 (PARTE 2)



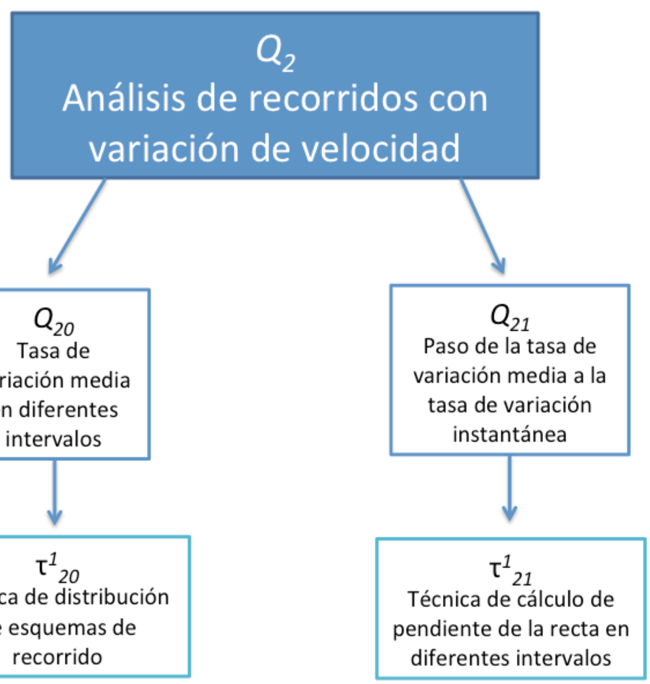
Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

Figura 6.72 REPRESENTACIÓN DE Q_1



ELABORACIÓN PROPIA

Figura 6.73 REPRESENTACIÓN DE Q_2



Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

6. 2. Análisis comparativo del saber a enseñar con respecto al MER

A continuación se presentarán diferentes tablas concernientes al análisis comparativo de las cuestiones del MER en los currículos de la LOE y de la LOMCE. Estas tablas harán un enfoque específico en Bachillerato con respecto a las matemáticas y tienen el fin verificar si existe o no una conexión entre el MER y dicho saber a enseñar.

$\boldsymbol{Q_0}$ Análisis de posiciones de móviles en descarrilamiento de vagones en montañas rusas en la LOE (figura 7.74).

FIGURA 6.74 Q_0 ANÁLISIS DE LAS CUESTIONES/TAREAS DE POSICIONES DE MÓVILES EN DESCARRILAMIENTO EN EL CURRICULUM LOE

MER	LOE	
Cuestión	Contenido	Criterio de evaluación
Q_{00} Trayectoria del descarrilamiento intuitiva	No	No
Q_{01} Trayectoria precisa de descarrilamiento	Interpretación geométrica […] del concepto de derivada de una función en un punto	Utilizar el cálculo de derivadas como herramienta para obtener conclusiones acerca del comportamiento de una función. Aplicar el concepto de derivada de una función en un punto, su interpretación geométrica y el cálculo de derivadas al estudio de fenómenos naturales, sociales o tecnológicos y a la resolución de problemas geométricos
Q_{02} Descarrilamiento y colisiones intuitivas	No	No
Q_{03} Descarrilamiento y colisión con trayectoria precisa	Interpretación geométrica […] del concepto de derivada de una función en un punto	Utilizar el cálculo de derivadas como herramienta para obtener conclusiones acerca del

		comportamiento de una función. Aplicar el concepto de derivada de una función en un punto, su interpretación geométrica y el cálculo de derivadas al estudio de fenómenos naturales, sociales o tecnológicos y a la resolución de problemas geométricos
Q_{04}Posiciones horizontales intuitivas	No	No
Q_{05} Posiciones horizontales precisas	Extremos relativos en un intervalo	Detectar valores extremos
Q_{06} Posiciones verticales intuitivas	No	No
Q_{07} Posiciones verticales precisas	Aplicación de la derivada al estudio de las propiedades locales de una función	Aplicar el concepto de derivada de una función en un punto, su interpretación geométrica y el cálculo de derivadas al estudio de fenómenos naturales, sociales o tecnológicos y a la resolución de problemas geométricos

Fuente: ELABORACIÓN PROPIA

La cuestión Q_{00} es una concreción de la definición geométrica de la derivada como pendiente de la recta tangente, tema que en sentido amplio sí es objeto de estudio según el curriculum LOE. Sin embargo, en dicho curriculum no se menciona la aproximación intuitiva de la derivada, por lo que se ha considerado que Q_{00}, Q_{02}, Q_{04} y Q_{06} no son tratadas.

Por otro lado Q_{01}, Q_{03}, Q_{05} y Q_{07} sí son abordadas en el curriculum para el cálculo de la recta tangente en coordenadas precisas, haciendo énfasis en la interpretación geométrica de la derivada, extremos locales y sus aplicaciones.

$\boldsymbol{Q_1}$ Análisis de equilibrio sobre cilindro en la LOE (figura 6.75).

FIGURA 6.75 Q_1 ANÁLISIS DE EQUILIBRIO SOBRE CILINDRO EN EL CURRICULUM LOE

MER	LOE	
Cuestión	Contenido	Criterio de evaluación
Q_{10} Posiciones iniciales de la tabla sobre el cilindro	No	No
Q_{11} Posiciones precisas de la tabla sobre superficie del cilindro	Interpretación geométrica […] del concepto de derivada de una función en un punto	Utilizar el cálculo de derivadas como herramienta para obtener conclusiones acerca del comportamiento de una función

FUENTE: ELABORACIÓN PROPIA

Véase que la definición geométrica de la derivada como pendiente de la recta tangente está presente este currículo. En este caso la cuestión Q_{11} sí es incluida en el curriculum de la LOE. Sin embargo no se aborda el aspecto intuitivo recogido en la cuestión Q_{10}.

$\boldsymbol{Q_2}$ Análisis de recorridos con variación de velocidad (figura 6.76).

FIGURA 6.76 Q_2 ANÁLISIS DE RECORRIDOS CON VARIACIÓN DE VELOCIDAD EN EL CURRICULUM LOE

MER	LOE	
Cuestión	Contenido	Criterio de evaluación
Q_{10} Tasa de variación media en diferentes intervalos	Tasa de variación	Utilizar técnicas matemáticas apropiadas para resolver problemas reales
Q_{11} Paso de la tasa de variación media a la tasa de variación instantánea	Tasa de variación Interpretación […] física del concepto de derivada de una función en un punto	Analizar situaciones y obtener información sobre fenómenos físicos

FUENTE: ELABORACIÓN PROPIA

La tasa de variación es tratada en general en el currículo de la LOE. Sin embargo no se especifica la distinción entre la tasa de variación media y la instantánea, que según el MER propuesto es básico, siendo además la primera la "razón de ser" de la segunda.

$\boldsymbol{Q_0}$ Análisis de posiciones de móviles en descarrilamiento de vagones en montañas rusas en la LOMCE (figura 6.77).

FIGURA 6.77 Q_0 ANÁLISIS DE LAS CUESTIONES/TAREAS DE POSICIONES DE MÓVILES EN DESCARRILAMIENTO EN EL CURRICULUM LOMCE

MER	LOMCE		
Cuestión	Contenido	Criterio de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Q_{00} Trayectoria del descarrilamiento intuitiva	No	No	No
Q_{01} Trayectoria precisa de descarrilamiento	Derivada de una función en un punto	Aplicar el concepto de derivada de una función en un punto, su interpretación geométrica y el cálculo de derivadas al estudio de fenómenos naturales, sociales o tecnológicos y a la resolución de problemas geométricos	Calcula la derivada de una función usando los métodos adecuados y la emplea para estudiar situaciones reales y resolver problemas.
Q_{02} Descarrilamiento y colisiones intuitivas	No	No	No
Q_{03} Descarrilamiento y colisión con trayectoria precisa	Derivada de una función en un punto	Aplicar el concepto de derivada de una función en un punto, su interpretación geométrica y el cálculo de	Calcula la derivada de una función usando los métodos adecuados y la emplea para estudiar situaciones reales y resolver problemas

		derivadas al estudio de fenómenos naturales, sociales o tecnológicos y a la resolución de problemas geométricos	
Q_{04}Posiciones horizontales intuitivas	No	No	No
Q_{05} Posiciones horizontales precisas	Recta tangente a una función en un punto	Aplicar el concepto de derivada de una función en un punto, su interpretación geométrica y el cálculo de derivadas al estudio de fenómenos naturales, sociales o tecnológicos y a la resolución de problemas geométricos	Interpreta las propiedades globales y locales de las funciones, comprobando los resultados con la ayuda de medios tecnológicos en actividades abstractas y problemas contextualizados
Q_{06} Posiciones verticales intuitivas	No	No	No
Q_{07} Posiciones verticales precisas	Recta tangente y normal	Aplicar el concepto de derivada de una función en un punto, su interpretación geométrica y el cálculo de derivadas al estudio de fenómenos naturales, sociales o tecnológicos y a la resolución de	Calcula la derivada de una función usando los métodos adecuados y la emplea para estudiar situaciones reales y resolver problemas Interpreta las propiedades globales y locales de las funciones, comprobando los resultados con la ayuda de medios

		problemas geométricos	tecnológicos en actividades abstractas y problemas contextualizados

FUENTE: ELABORACIÓN PROPIA

Para el currículo de la LOMCE sucede lo mismo que en el caso de la LOE con respecto al uso de la aproximación intuitiva de la derivada. Es decir, ni en el contenido ni en los criterios de evaluación ni en los estándares de aprendizaje evaluables son tratadas las cuestiones Q_{00}, Q_{02}, Q_{04} y Q_{06}.

Obsérvese por otro lado cómo el tratamiento de las cuestiones Q_{01}, Q_{03}, Q_{05} y Q_{07} sí es objeto de estudio en este currículo. Haciendo énfasis no solo en la interpretación geométrica, extremos locales y sus aplicaciones con respecto a la derivada, sino expandiendo el currículo por medio de la incorporación de la recta normal y el calculo la derivada de una función usando los métodos adecuados para estudiar situaciones reales y resolver problemas.

$\boldsymbol{Q_1}$ Análisis de equilibrio sobre cilindro en la LOMCE (figura 6.78).

FIGURA 6.78 Q_1 ANÁLISIS DE EQUILIBRIO SOBRE CILINDRO EN EL CURRICULUM LOE

MER	LOMCE		
Cuestión	Contenido	Criterio de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Q_{10} Posiciones iniciales de la tabla sobre el cilindro	No	No	No
Q_{11} Posiciones precisas de la tabla sobre superficie del cilindro	Recta tangente a una función en un punto	Aplicar el concepto de derivada de una función en un punto, su interpretación geométrica y el cálculo de	Calcula la derivada de una función usando los métodos adecuados y la emplea para estudiar situaciones reales y resolver problemas

		derivadas al estudio de fenómenos naturales, sociales o tecnológicos y a la resolución de problemas geométricos	

FUENTE: ELABORACIÓN PROPIA

Q_{10} comprende técnicas intuitivas o físicas no algebraicas, y no se incluyen así en el curriculum LOMCE. Q_{11} es tratada en este currículo, como sucedía en el de la LOE, incorporando métodos para cálculos de derivadas en situaciones reales como puede ser la presentada a lo largo de la cuestión Q_1.

$\boldsymbol{Q_2}$ Análisis de recorridos con variación de velocidad (figura 6.79).

FIGURA 6.79 Q_2 ANÁLISIS DE RECORRIDOS CON VARIACIÓN DE VELOCIDAD EN EL CURRICULUM LOMCE

MER	LOMCE		
Cuestión	Contenido	Criterio de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Q_{10} Tasa de variación media en diferentes intervalos	La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo.	Conocer e interpretar geométricamente la tasa de variación media en un intervalo y en un punto como aproximación al concepto de derivada	Analiza el crecimiento o decrecimiento de una función mediante la tasa de variación media calculada a partir de la expresión algebraica
Q_{11} Paso de la tasa de variación media a la tasa de variación instantánea	Tasa de variación media y tasa de variación instantánea	Interpretación geométrica de la derivada en puntos específicos y sus aplicaciones a fenómenos naturales, sociales ó	Calcula la derivada de una función usando los métodos adecuados y la emplea para estudiar situaciones reales y resolver problemas

		tecnológicos y a resolución de problemas geométricos	

FUENTE: ELABORACIÓN PROPIA

Este currículo, a diferencia del de la LOE, sí especifica el uso de las tasas de variación media e instantánea.

Obsérvese cómo no todas de las cuestiones tratadas para este MER se ponen en práctica en ambos currículos. Esto implica que el uso de la derivada como un proceso de cálculo gráfico e intuitivo del límite no sea relevante ni como contenido ni como criterio de evaluación ni como estándares de aprendizaje.

6.3. Análisis comparativo del saber enseñado con respecto al MER

A continuación se presentarán diferentes tablas acerca de la aplicación de las técnicas descritas en el MER en libros de texto vigentes, es decir, acordes con la LOE, pues la LOMCE entra en vigor en el próximo curso y no existen libros de texto de acuerdo con dicha ley. Este análisis se circunscribirá Bachillerato con respecto a las matemáticas, en específico, a las derivadas. Tiene el fin de verificar si existe o no una conexión entre el MER y técnicas de resolución de tareas relacionadas con las derivadas en Bachillerato. Con respecto a la transposición didáctica, estas tablas analizan el saber enseñado, es decir, cómo realizan la transposición en dicha fase. Se procede a analizar los manuales escolares (Bascós y Pena, 2008a), (Bascós y Pena, 2008b), (Colera, Oliveira, García y Santaella, 2009) y (Colera y Oliveira, 2009).

$\boldsymbol{Q_0}$ Análisis de técnicas de posiciones de móviles en descarrilamiento de vagones en montañas rusas (figura 6.80).

FIGURA 6.80 Q_0 ANÁLISIS DE TÉCNICAS S DE POSICIONES DE MÓVILES EN DESCARRILAMIENTO EN EL CURRICULUM LOE

		¿Se aplica la técnica?			
MER		Libro de texto editorial Anaya		Libro de texto editorial Oxford	
Cuestión	Técnica	1^0 de Bachi-llerato	2^0 de Bachi-llerato	1^0 de Bachi-llerato	2^0 de Bachi-llerato
Q_{00} Trayectoria del descarrilamiento	τ_{00}^1 Intuición gráfica	No	No	No	No
		No	No	No	No
	τ_{00}^2 Intuición física	No	No	No	No
Q_{01} Trayectoria precisa de descarrilamiento	τ_{01}^1 Proceso de acotación de rectas hasta que sean tangente al punto de descarrilamiento	No	No	No	No
Q_{02} Descarrilamiento y colisiones intuitivas	τ_{02}^1 Intuición gráfica	No	No	No	No
Q_{03} Descarrilamiento y colisión con trayectoria precisa	τ_{03}^1 Búsqueda de rectas tangentes secantes a la trayectoria al mismo tiempo	No	No	No	No
Q_{04} Posiciones horizontales intuitivas	τ_{04}^1 Intuición gráfica de descarte	No	No	No	No
Q_{05} Posiciones horizontales precisas	τ_{05}^1 *m=0* y colocación hasta encontrar tangentes	No	No	No	No
Q_{06} Posiciones verticales intuitivas	τ_{06}^1 Intuición gráfica de descarte	No	No	No	No
Q_{07} Posiciones verticales precisas	τ_{07}^1 *m=∞* y colocación hasta encontrar tangentes	No	No	No	No

FUENTE: ELABORACIÓN PROPIA

Para la cuestión Q_0, no se aplican las técnicas de intuiciones gráficas del MER ni tampoco de aproximaciones construyendo rectas y descartando. De ello se deduce que se introduce directamente una definición de derivada y la misma es aplicada. Sin embargo, no se construye una noción de derivada ni intuitiva ni gráficamente, como sí recoge el MER presentado.

$\boldsymbol{Q_1}$ Análisis de equilibrio sobre cilindro (figura 6.81).

FIGURA 6.81 Q_1 ANÁLISIS DE TÉCNICAS DE EQUILIBRIO SOBRE CILINDRO EN EL CURRICULUM LOE

MER		¿Se aplica la técnica?			
		Libro de texto editorial Anaya		Libro de texto editorial Oxford	
Cuestión	Técnica	1^0 de Bachi-llerato	2^0 de Bachi-llerato	1^0 de Bachi-llerato	2^0 de Bachi-llerato
Q_{10} Posiciones iniciales de la tabla sobre el cilindro	τ_{10}^{1} Intuición gráfica	No	No	No	No
	τ_{10}^{2} Intuición física	No	No	No	No
Q_{11} Posiciones precisas de la tabla sobre superficie del cilindro	τ_{11}^{1} Construcción de rectas y aproximación de pendiente	No	No	No	No

FUENTE: ELABORACIÓN PROPIA

Para la cuestión Q_1, tampoco se aplican técnicas de intuiciones gráficas ni de aproximaciones como las del MER. Por lo tanto, la definición de derivada parece tener limitaciones en cuanto su uso, haciendo más énfasis en problemas analíticos que gráficos e intuitivos.

$\boldsymbol{Q_2}$ Análisis de recorridos con variación de velocidad (figura 6.82).

FIGURA 6.82 Q_2 ANÁLISIS DE TÉCNICAS DE RECORRIDOS CON VARIACIÓN DE VELOCIDAD EN EL CURRICULUM LOE

MER		¿Se aplica la técnica?			
		Libro de texto editorial Anaya		Libro de texto editorial Oxford	
Cuestión	Técnica	1^0 de Bachi-llerato	2^0 de Bachi-llerato	1^0 de Bachi-llerato	2^0 de Bachi-llerato

Q_{20} Tasa de variación media en diferentes intervalos	τ_{21}^{1} Técnica de distribución de esquemas de recorrido	Sí	Sí	Sí	Sí
Q_{21} Paso de la tasa de variación media a la tasa de variación instantánea	τ_{21}^{1} Técnica de cálculo de pendiente de la recta en diferentes intervalos	Sí	Sí	Sí	Sí

FUENTE: ELABORACIÓN PROPIA

Para la cuestión Q_2 sí se aplican las técnicas de distribución siguiendo esquemas para el cálculo de la tasa de variación media y la técnica de construcción de rectas para hallar la tasa de variación instantánea.

Como se puede observar, pocas de las técnicas empleadas para las cuestiones del MER se ponen en práctica en los libros de texto. Esto implica que no se aborda la derivada como un proceso de cálculo gráfico e intuitivo del límite correspondiente. Sin embargo, existen diferentes técnicas de carácter más algorítmico que sí son aplicadas para la comprensión de este tema como aproximaciones infinitesimales utilizando límites, reglas de derivación, etc.

7. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

En el presente trabajo se ha realizado un análisis matemático-didáctico de la derivada en Bachillerato. Inicialmente se ha tratado la cuestión epistemológico-matemática mediante la construcción del MER. En segundo lugar, el análisis didáctico se ha realizado en dos fases, determinadas por la transposición didáctica: el análisis del saber a enseñar y el análisis del saber enseñado.

La elaboración del MER ha permitido identificar tipos de tareas resolubles mediante la derivada que en la institución escolar de Bachillerato son susceptibles de ser consideradas (*Objetivo Especifico 1*). Se ha demostrado en la descripción del MER que las cuestiones se han podido responder efectivamente por medio de las técnicas empleadas basadas en las aproximaciones sucesivas, proceso íntimamente ligado a la noción de límite, al cálculo infinitesimal, es decir, el MER se ha constituido en el dispositivo imprescindible para explicitar las técnicas intuitivas conducentes a la definición infinitesimal de la derivada (*Objetivo Especifico 2).*

Tanto las cuestiones como las técnicas del MER han sido el punto de partida para la detección de carencias en la transposición didáctica de la derivada tanto en primero como en segundo de Bachillerato *(Objetivo Especifico 3).*

En el ámbito curricular, se ha podido observar al comparar con el MER los currículos de LOE y LOMCE que no se mencionan ni representaciones gráficas intuitivas ni cuestiones que conduzcan al aprendizaje de estos aspectos de las derivadas en ninguno de los currículos. Por tanto, se producirá lo que la investigación de Heid (1988) detectó, es decir, la ausencia de representaciones gráficas puede afectar negativamente en la comprensión de la derivada por parte del alumno. Más aún, al no utilizar dichas representaciones, nociones de las abordadas en el MER como las aproximaciones por secantes al límite de la derivada van a quedar ausentes en la formación de los alumnos de Bachillerato. Por lo tanto se confirma la *Hipótesis 1* que negaba la existencia de una aproximación intuitiva al concepto de la derivada en los currículos LOE y LOMCE.

Con respecto a los libros de textos analizados, se ha podido observar al compararlos con el MER que no se mencionan a fondo ni representaciones gráficas intuitivas ni cuestiones que conduzcan al aprendizaje de estos aspectos de las derivadas. Cabe destacar que sí existen algunas representaciones en el estudio del currículo de Matemáticas de primero de bachillerato. Por tanto, se puede observar que no se aborda la aproximación intuitiva al concepto de derivada en todos los libros de texto validando la *Hipótesis 2.*

Por otro lado, se puede notar en el estudio comparativo con el MER de currículos y libros de texto que la falta de técnicas de aproximación al concepto de la derivada es notoria. Una de las razones principales es que la derivada se explica de forma analítica y no con representaciones. Apoyando nuevamente estudios de Orton (1983) y Heid (1988), dando validez a la *Hipótesis 3*. Más aún, la aplicación de las técnicas de aproximación a la derivada descritas en el MER podrán ayudar a fomentar notablemente la comprensión de la derivada sin tener que utilizar la definiciones del límite (Firouzian, 2013).

Por consiguiente, como se ha observado a través de este trabajo, se puede argumentar que el contenido y práctica de las derivadas puede generar muchas dificultades en el ámbito escolar. Por lo tanto, al analizar las carencias transpositivas de la derivada en Bachillerato, se puede decir que su estudio epistemológico-didáctico tendrá un gran peso no solo para aquellos estudiantes que tengan que practicarlas, sino también para el profesorado en formación que tenga que enseñarlas.

Finalmente, como línea de investigación futura, se pretende hacer un análisis similar al realizado en el marco de la educación española pero circunscribiendo el ámbito a la educación en Estados Unidos de América, donde el autor pretende desarrollar su labor docente.

BIBLIOGRAFÍA

BOE. (2007). *Real decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas*. (11 de mayo, 2015): 45449.

Bascós, E. & Pena, T. (2008a). *Matemáticas 1 Bachillerato*. Madrid: Oxford.

Bascós, E. & Pena, T. (2008b). *Matemáticas 2 Bachillerato*. Madrid: Oxford.

BOE. (2014). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. (9 de mayo, 2015): 384.

Bosch, M. & Gascón, J. (2007). *25 años de transposición didáctica*. Sociedad, Escuela y Matemáticas. En Ruiz Higuera, L., Estepa Castro, A. & García, F.J., *Aportaciones de la teoría Antropológica de la Didáctica,* 385- 406. Jaén: Servicio de publicaciones de la Universidad de Jaén.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques 19 (2),* 221–266.

Colera, J., Oliveira, M.J., García, R. & Santaella, E. (2009). *Bachillerato 1. Matemáticas I*. Madrid: Anaya.

Colera, J. & Oliveira, M.J. (2009). *Bachillerato 2. Matemáticas II*. Madrid: Anaya.

Corica, A. & Otero, M. (2009). Análisis de una praxeología matemática universitaria en torno al límite de funciones y la producción de los estudiantes en el momento de la evaluación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* 12 (3), 305-331.

Dancy, J. (1991). *Introducción a la epistemología contemporánea.* Ed. Tecnos: Madrid.

De Faria-Campos, E. (2006). Transposición Didáctica: definición, epistemología, objeto de estudio. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática.* 1 (2).

Dolores, C. (2000). El futuro del cálculo infinitesimal. En Cantoral R. (coordinador), *ICME-8* (pp. 155-181). México D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica.

Firouzian, S. (2013). Student's Way of Thinking about Derivative and its correlation to their ways of solving applied problems. En Brown, S., Karakok, G., Hah Roh, K. & Oehrtman, M. (Ed.) En *Proceedings of the 16th Annual conference on research in undergraduate mathematics education.* (pp. 2/492-2/497). Denver, Colorado.

Fonseca, C., Gascón, J. & Lucas, C. (2014). Desarrollo de un modelo epistemológico de referencia en torno a la modelización funcional. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 17(3), 289-318.

Gilfeather, M. & del Regato, J. (1999). Mathematics defined. *Mathematics Esperienced-Based Approached Introduction.*

Giroux, H. (1990). *Los profesores como intelectuales: hacia una pedagogía crítica del aprendizaje.* Barcelona: Ediciones Paidós Ibérica S.A.

González, A. & Díaz, H. (2008). Desde el currículo hasta la didáctica o sobre la circulación de los saberes y sus controles en la universidad: un ejemplo en la enseñanza de la medicina. *Iatreia.* 21(1), 83-93.

Grisales, L. & González, E. (2006). El saber sabio y el saber enseñado: un problema para la didáctica universitaria. *Educación y Educadores,* 12(2), 77-86.

Heid, K. (1988). Resequencing Skills and Concepts in Applied Calculus Using the Computer as a Tool, *Journal for Research in Mathematics Education*, 19 (1) 3-25.

Piaget, J. & García, R. (2008). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*. Madrid: Siglo XXI Editores.

López de los Mozos, M. (1991). Aproximación didáctica al concepto de derivada. *Revista Números.* 21, 7-14.

Orton, A. (1983). Students' Understanding of Differentiation*, Educational Studies in Mathematics*. 14(3), 235-250.

Pino-Fan, L., Godino, J.D., Font, V. & Castro, W. (2013). Prospective teacher's specialized content knowledge on derivative. En Ubuz, B., Haser, C. & Mariotti, M.A. (Ed.) *Proceedings of the Eight Congress of European Research in Mathematics Education.* (pp. 3195-3205). Ankara: Middle East Technical University.

Ramírez, R. (2009). Historia y epistemología de la función derivada Publicada en Tecné, Episteme y Didaxis: *Tecné, Episteme y Didaxis: TE* Δ No. Extraordinario, 157-162.